Retours sur mes oraux

Oral d'algèbre et de géométrie

Couplage. Mon couplage était les leçons 108 et 159.

Leçon choisie. 159. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Développement. Théorème de réduction de Frobenius (lemme + existence).

Questions et exercices.

▷ Une fois que l'on a obtenu la décomposition de Frobenius d'une matrice, à quelle condition cette dernière est-elle diagonalisable ? (La question est plutôt ouverte.)

▷ Étant donné un hyperplan, « combien » de formes linéaires le définissent ?

· Soit $H \subset E$ un hyperplan. Si $H = \operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Ker} \psi$ avec $\phi, \psi \in E^*$, alors les formes linéaires ϕ et ψ sont colinéaires. Ainsi, en notant $H = \operatorname{Ker} \phi$, les seules formes linéaires définissant l'hyperplan H sont les éléments $\lambda\phi$ avec $\lambda \in K^\times$.

▷ Donner une idée de la preuve du lemme nécessaire à la preuve du théorème de extrema liés (le fameux lemme polytechnique).

▷ Étant donné un sous-espace vectoriel $F \subset E$, décrire l'espace $(E/F)^*$. On pourra l'identifier à un sous-espace vectoriel de E^*.

· En utilisant le passage au quotient, il s'agit de l'ensemble

$$(E/F)^\times \simeq \{\phi \in E^* \mid \operatorname{Ker} \phi \supset F\} = F^\perp.$$

▷ On considère le sous-espace vectoriel

$$F := \left\{ (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \;\middle|\; \forall i, i' \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i',j} \right\}.$$

Quelle est sa dimension ? Faire le lien avec la leçon.

· Sa dimension vaut $n^2 - n + 1$. Plus précisément, on note $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On considère les formes linéaires non nulle

$$\phi_i := \sum_{j=1}^{n} (E^*_{i,j} - E^*_{1,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^*, \qquad i > 1.$$

Alors on peut écrire $F = \{\phi_2, \dots, \phi_n\}^\circ$ et sa dimension vaut donc $n^2 - (n-1)$.

Oral d'analyse et de probabilité

Couplage. Mon couplage était les leçons 214 et 264.

Leçon choisie. 214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Développement. Surjectivité de l'exponentielle matricielle.

Questions.

▷ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice. Pourquoi la matrice A^{-1} est-elle un élément de $\mathbf{C}[A]$?

▷ Dans un espace vectoriel normé, pourquoi un sous-espace vectoriel de dimension finie est-il toujours fermé ?

- ▷ Montrer l'exercice suivant issu du Rouvière (je l'avais mis dans mon plan). Soit $f \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'elle est k-dilatante avec $k > 0$, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant k \|x - y\|.$$

Montrer qu'il s'agit d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

- · On utilise le théorème d'inversion globale et il ne reste plus qu'à montrer que son image est l'espace $\mathbf{R}^n$ tout entier. Pour ce dernier point, on vérifie que son image est un ouvert (cela est donné par le théorème) et un fermé (en raisonnant avec des suites de Cauchy), la connexité de l'espace $\mathbf{R}^n$ conclut alors.
- ▷ Comment montre-t-on le théorème spectral à partir du théorème des extrema liés ?
- · Cf. Objectif Agrég.
- ▷ Rappeler la différentielle de l'exponentielle matricielle.
- ▷ Calculer l'espace tangent de la variété $\mathrm{SO}(n)$ en une matrice quelconque.
- · Il suffit d'utiliser l'expression de l'espace tangent lorsque la variété est définie par des équations, en l'occurrence les équations ${}^{\mathrm{t}}MM = I_n$ et $\det M = 1$.