Développement 39. Le théorème d'Abel angulaire et le théorème taubérien faible

Théorème 1 *(Abel angulaire).* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur le disque unité ouvert. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ un réel. On considère l'ensemble
$$\Delta \coloneqq \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \quad \text{et} \quad \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$
Alors lorsque $z \longrightarrow 1$ avec $z \in \Delta$, on a
$$f(z) \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Preuve Notons $R_n \coloneqq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$ avec $n \in \mathbf{N}$ les restes de la série $\sum a_n$. Soit $z \in \mathbf{C}^*$ un complexe vérifiant $|z| < 1$. En effectuant une transformation d'Abel, pour tout entier $N \in \mathbf{N}^*$, on obtient
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(z^n - 1) \\ &= (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1).\end{aligned}$$
En laissant tendre l'entier N vers l'infini, on en déduit
$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \quad \text{avec} \quad S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$
Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Comma la série $\sum a_n$ converge, la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers zéro, donc on peut trouver un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall n > N, \qquad |R_n| < \varepsilon.$$
Avec la dernière égalité, on trouve alors
$$\begin{aligned}|f(z) - S| &\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon\, |z-1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \\ &\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}. \qquad (1)\end{aligned}$$
On suppose que $z \in \Delta$. D'une part, on écrit $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $|\theta| \leqslant \theta_0$. Alors
$$|z|^2 = (1 - \rho\cos\theta)^2 + \rho^2 \sin^2\theta = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$$
et, lorsque $\rho \leqslant \cos\theta_0$, on obtient alors
$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \leqslant \frac{\rho}{2\rho\cos\theta - \rho^2} \times 2 \leqslant \frac{2}{2\cos\theta - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}.$$
D'autre part, soit $\alpha > 0$ un réel vérifiant $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$. Finalement, en supposant avoir $|z-1| \leqslant \min(\alpha, \cos\theta_0)$ et en utilisant l'inégalité (1), on obtient la majoration
$$|f(z) - S| \leqslant \varepsilon\left(\alpha + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$
ce qui assure la conclusion. ◁

Théorème 2 *(taubérien faible).* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f sa somme sur le disque unité ouvert. On suppose que
- la fonction f admet une limite $S \in \mathbf{C}$ lorsque $x \in \mathbf{R}$ et $x \longrightarrow 1^-$;
- $a_n = o(1/n)$.

Alors la série $\sum a_n$ converge et sa somme est la limite S.

Preuve Notons $S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k$ avec $n \in \mathbf{N}$ les sommes partielles de la série $\sum a_n$. Fixons un entier $n \in \mathbf{N}$ et un réel $x \in]0,1[$. On écrit
$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$
Comme $1 - x^k = (1-x)(1 + \cdots + x^{k-1}) \leqslant k(1-x)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$, on obtient
$$\begin{aligned}|S_n - f(x)| &\leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k\,|a_k|}{n} x^k \\ &\leqslant (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n} k\,|a_k|}{n(1-x)}\end{aligned}$$
où le réel M désigne la borne supérieure de la suite $(k\,|a_k|)_{k\in\mathbf{N}}$ qui existe par notre seconde hypothèse. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ un réel. Alors la dernière inégalité donne
$$\left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k\,|a_k|}{\varepsilon}.$$
Avec toujours la même hypothèse, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall k > N, \qquad k\,|a_k| < \varepsilon^2.$$
En supposant $n \geqslant N$, on obtient alors
$$\left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| < (M+1)\varepsilon.$$
Par ailleurs, comme $1 - \varepsilon/n \longrightarrow 1^-$, la seconde hypothèse assure qu'il existe un autre entier $N' \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N', \qquad \left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| < \varepsilon.$$
Ainsi, pour tout entier $n \geqslant \max(N, N')$, l'inégalité triangulaire donne
$$|S_n - S| \leqslant \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| + \left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| < (M+2)\varepsilon$$
ce qui conclut. ◁

[1] Xavier Gourdon. *Algèbre*. 2e édition. Ellipses, 2009.