Développement. L'équation de Bessel

On considère l'*équation de Bessel*

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{1}$$

Proposition 1. La fonction

$$g\colon \left|\begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{array}\right.$$

est une solution de l'équation (1).

Preuve Le théorème de convergence dominée assure que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que, pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, ses dérivées vérifient

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{et} \qquad g'''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} xg''(x) + g'(x) + xg(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(1-\sin^2\theta)\cos(x\sin\theta) - \sin\theta\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos^2\theta\cos(x\sin\theta) - \sin\theta\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}[\cos\theta\sin(x\cos\theta)]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

◁

Proposition 2. Il existe une unique solution f_0 de l'équation (1) qui est développable en série entière telle que $f_0(0) = 1$. De plus, elle est définit sur toute la droite $\mathbf{R}$.

Preuve Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une solution développable en série entière telle que $f(0) = 1$. Il existe alors un réel $R > 0$ avec $]-R, R[\subset I$ et une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tels que

$$\forall x \in \,]-R, R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En dérivant, pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} xf(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \\ xf''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n. \end{aligned}$$

Comme la fonction f vérifie l'équation (1), en identifiant les termes dans la série entière, on peut écrire les relations

$$a_1 = 0a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

Une récurrent immédiate conclut que

$$a_{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}a_0, \qquad n \geqslant 0.$$

Comme $f(0) = 1$, on en déduit $a_0 = 1$. D'où

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^n, \qquad x \in \,]-R, R[. \tag{2}$$

Ceci donne l'unicité. Réciproquement, cette fonction avec $R = +\infty$ est une solution de l'équation (1) ce qui conclut l'existence. ◁

Proposition 3. Soit $f\colon]0, a[\longrightarrow \mathbf{R}$ une solution de l'équation (1). La famille (f, f_0) est libre si et seulement si la fonction f n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Preuve La fonction f_0 étant continue, elle est bornée au voisinage de l'origine et le sens réciproque s'en déduit. Réciproquement, on suppose que la famille (f, f_0) est libre. Sur l'intervalle $]0, a[$, l'équation (1) se réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = A(x)\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1/x \end{pmatrix}.$$

Comme $\operatorname{Tr} A(x) = -1/x$, le wronskien $w\colon [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}$ de la famille (f, f_0) vérifie

$$w' = -w/x \qquad \text{sur }]0, a[.$$

Il existe donc une une constante $C > 0$ telle que

$$w(x) = f(x)f_0'(x) - f'(x)f_0(x) = C/x, \qquad x \in \,]0, a[. \tag{3}$$

Comme la famille (f, f_0) est libre, c'est une base de l'ensemble des solutions. On en déduit que $C \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction f est bornée au voisinage de l'origine. Lorsque $x \longrightarrow 0^+$, l'expression (2) permet d'écrire

$$f_0(x) \longrightarrow 1 \qquad \text{et} \qquad f_0'(x) \longrightarrow \ell \in \mathbf{R}.$$

Avec l'égalité (3), on en déduit $f'(x) \sim -C/x$. Maintenant, soit $b \in [0, a]$. Comme la fonction $x \longmapsto -C/x$ est de signe constant sur l'intervalle $]0, b]$ et n'y étant pas intégrable, on peut écrire

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_b^x -\frac{C}{t}\,\mathrm{d}t = -C(\ln x - \ln b).$$

D'où $f(x) \longrightarrow +\infty$ ce qui contredit notre hypothèse absurde. ◁

Corollaire 4. Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^n.$$

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 4.* Cassini, 2012.