Développement 25. Le théorème de Cauchy homotopique et les logarithmes complexes

Théorème 1. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ deux chemins homotopes dans Ω ayant les mêmes extrémité ou étant des lacets. Soit $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Preuve • *Première étape.* Considérons une homotopie

$$H \colon \left|\begin{array}{l} [0,1]^2 \longrightarrow \Omega, \\ (s,t) \longmapsto \gamma_u(s) \end{array}\right.$$

entre les chemins γ_0 et γ_1. Soit $\varepsilon > 0$ un réel qu'on fixe $3\varepsilon = \mathrm{d}(\operatorname{Im} H, \mathbf{C} \setminus \Omega)$ si $\Omega \neq \mathbf{C}$. Comme l'ensemble $[0,1]^2$ est compact, le théorème de Heine assure que la fonction H est uniformément continue, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall u, v, s, t \in [0,1], \qquad \begin{cases} |u - v| < \eta, \\ |s - t| < \eta \end{cases} \implies |\gamma_u(s) - \gamma_v(t)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Soit $0 = u_0 < \cdots < u_m = 1$ une subdivision de pas $< \eta$. Soit $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ une autre telle subdivision.

Soit $j \in [\![1, m-1]\!]$ un indice. On veut modifier le chemin γ_{u_j}. Considérons le chemin par lignes brisées $\tilde\gamma_j \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ reliant les points $\gamma_{u_j}(t_0), \dots, \gamma_{u_j}(t_n)$. Alors il est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et à valeurs dans l'ouvert Ω d'après la relation (1).

• *Deuxième étape.* Montrons que

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Par la choix du réel ε, le disque ouvert $D_i \coloneqq \mathrm{D}(\gamma_0(t_i), 2\varepsilon)$ est contenu dans l'ouvert Ω, donc la fonction f admet une primitive $F_i \colon D_i \longrightarrow \mathbf{C}$. On pose

$$a_i \coloneqq \gamma_0(t_i) \in \Omega \qquad \text{et} \qquad b_i \coloneqq \tilde\gamma_1(t_i) \in \Omega.$$

Grâce à la relation (1), les disques D_i et D_{i+1} contiennent les points a_i, b_i, a_{i+1} et b_{i+1}, donc il contient les segments $[a_i, a_{i+1}]$ et $[b_i, b_{i+1}]$. Par ailleurs, comme les fonctions F_i et F_{i+1} sont des primitives de la fonction f sur l'intersection $D_i \cap D_{i+1}$, elles diffèrent d'une constante. Ainsi

$$F_{i+1}(a_{i+1}) - F_i(a_{i+1}) = F_{i+1}(b_{i+1}) - F_i(b_{i+1}),$$

c'est-à-dire

$$F_{i+1}(a_{i+1}) - F_{i+1}(b_{i+1}) = F_i(a_{i+1}) - F_i(b_{i+1}),$$

Avec cette dernière égalité, on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\tilde\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{i=0}^{n-1} [F_i(a_{i+1}) - F_i(a_i)] - \sum_{i=0}^{n} [F_i(b_{i+1}) - F_i(b_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [F_{i+1}(a_{i+1}) - F_{i+1}(b_{i+1})] - \sum_{i=0}^{n-1} [F_i(a_i) - F_i(b_i)] \\ &= [F_n(a_n) - F_n(b_n)] - [F_0(a_0) - F_0(b_0)]. \end{aligned}$$

Comme $a_0 = b_0$ et $a_n = b_n$ ou $a_0 = a_n$ et $b_0 = b_n$, on obtient l'égalité (2).

• *Troisième étape.* De la même manière, on montre que

$$\int_{\tilde\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \dots, \qquad \int_{\tilde\gamma_{m-1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

De proche en proche, cela montre alors le théorème. ◁

Corollaire 2. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^*$ un ouvert simplement connexe. Alors il existe un détermination holomorphe du logarithme sur Ω.

Preuve Fixons un point $z_0 \in \Omega$. Pour un point $z \in \Omega$, on pose

$$F(z) \coloneqq \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

pour un chemin quelconque $\gamma_z \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ joignant les points z_0 et z. D'après le théorème, cette définition ne dépend pas du chemin choisi. Soient $z, h \in \mathbf{C}$ deux complexes vérifiant $z, z+h \in \Omega$. Alors le même théorème permet d'écrire

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Comme la fonction $\zeta \in \mathbf{C}^* \longmapsto f(\zeta) \coloneqq 1/\zeta$ est continue au point $z \neq 0$, on peut écrire

$$f(\zeta) = f(z) + \phi(\zeta)$$

pour une fonction holomorphe ϕ définie au voisinage du point z vérifiant $\phi(\zeta) \longrightarrow 0$ lorsque $\zeta \longrightarrow 0$. Pour un point h assez proche de z, on obtient alors

$$F(z+h) - F(z) = f(z) \underbrace{\int_{[z,z+h]} \mathrm{d}\zeta}_{h} + \int_{[z,z+h]} \phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

et, lorsque $h \longrightarrow 0$, on a

$$\left| \int_{[z,z+h]} \phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \sup_{\zeta \in [z,z+h]} |\phi(\zeta)|\,|h| \longrightarrow 0$$

Ceci conclut alors

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{z} \xrightarrow[h \to 0]{} f(z) = \frac{1}{z}.$$

La fonction F est donc holomorphe sur Ω de dérivée $F' = f$. De plus, on calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z e^{-F(z)}] = [1 - zF'(z)] e^{-F(z)} = 0.$$

Comme l'ouvert Ω est connexe, la fonction $z \longmapsto z e^{-F(z)}$ est une constante $c \in \mathbf{C}^*$. On peut trouver un complexe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $c = e^{\mu}$. La fonction $\operatorname{Log}_\Omega \coloneqq F + \mu$ vérifie

$$e^{\operatorname{Log}_\Omega(z)} = z, \qquad z \in \Omega.$$ ◁

[1] Patrice Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3*. Dunod, 2006.