Développement. La décomposition polaire

Lemme 1. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ une matrice symétrie réelle définie positive. Alors il existe une unique matrice réelle symétrique positive $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = S^2$.

Preuve Montrons l'existence. Comme la matrice A est symétrique réelle, le théorème spectrale assure qu'elle est diagonalisable en base orthonormée : on peut écrire

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$$

pour une matrice $P \in \mathrm{O}(n)$ et des réels $\lambda_i > 0$. La matrice

$$S := P \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$$

convient alors.

Passons à l'unicité. On reprend la matrice S définie précédemment. Soit $\tilde{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ une autre telle matrice. Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}.$$

Alors $S = Q(A) = Q(\tilde{S}^2)$. De cette égalité, on en déduit que les matrices S et $\tilde{S}$ commutent et qu'elles sont donc codiagonalisables puisque les deux sont diagonalisables. Notons $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice et $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$ des réels tels que

$$S = P_0 \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P_0^{-1} \qquad \text{et} \qquad \tilde{S} = P_0 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_0^{-1}.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ un indice. Comme $S^2 = \tilde{S}^2$, les deux dernières égalités donnent $\lambda_i = \mu_i^2$. Comme la matrice $\tilde{S}$ est définie positive, ceci assure que $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$. D'où $S = \tilde{S}$. ◁

Théorème 2 *(décomposition polaire).* L'application

$$\left|\begin{array}{c} \mathrm{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \\ (O, S) \longmapsto OS \end{array}\right.$$

est un homéomorphisme.

Preuve Cette application est bien définie et elle est continue. Il reste à vérifier qu'elle est bijective et que sa réciproque est continue.

- *C'est une bijection.* Montrons sa surjectivité. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible. La matrice ${}^t MM$ est alors symétrique réelle définie positive. D'après le lemme, il existe une matrice $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $S^2 = {}^t MM$. La matrice $O := MS^{-1}$ vérifie $M = OS$ et elle est orthogonale puisque

$${}^t OO = {}^t S^{-1}\, {}^t MMS^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n.$$

Ceci conclut la surjectivité.

Montrons son injectivité. Soient $O, \tilde{O} \in \mathrm{O}(n)$ et $S, \tilde{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ quatre matrices vérifiant $M := OS = \tilde{O}\tilde{S}$. Alors

$${}^t MM = {}^t(OS)OS = {}^t S\, {}^t OOS = S^2 \qquad \text{et} \qquad {}^t MM = \tilde{S}^2.$$

L'unicité dans le lemme fournit alors $S = \tilde{S}$ ce qui donne ensuite $O = \tilde{O}$. Finalement, l'application est une bijection.

- *Sa réciproque est continue.* Soit $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ qui converge vers une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Notons $M_k = O_k S_k$ et $M = OS$ les décompositions polaires des matrices M_k et O_k. Il faut montrer que $(O_k, S_k) \longrightarrow (O, S)$. Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est compact. Soit alors $\varphi \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une extraction telle que la suite $(O_{\varphi(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers une matrice $\tilde{O} \in \mathrm{O}(n)$. Comme $S_{\varphi(k)} = {}^t O_{\varphi(k)} M_{\varphi(k)}$ et comme le produit et la transposée sont continus, la suite $(S_{\varphi(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice $\tilde{S} := {}^t\tilde{O}M$. Mais on peut écrire

$$\tilde{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cap \overline{\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})} = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cap \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}).$$

Finalement, on a écrit $M = \tilde{O}\tilde{S}$ pour une matrice orthogonale $\tilde{O}$ et une matrice symétrique définie positive $\tilde{S}$. Par l'unicité montrée précédemment, on en déduit que $O = \tilde{O}$. Ainsi la suite $(O_k)_{k \in \mathbf{N}}$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence qui est la matrice O. Comme le groupe $\mathrm{O}(n)$ est compact, elle converge vers cette dernière. Par suite, la suite $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice S ce qui conclut. ◁

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.