Développement 27. Densité des fonctions continues et dérivables nulle part

Théorème 1. Notons $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues $[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ que l'on munit de la norme infinie $\| \ \|_\infty$. Alors le sous-ensemble de $\mathscr{C}$ des fonctions qui ne sont nulle part dérivables est dense dans $\mathscr{C}$.

Preuve Notons $I := [0,1]$.

• *Première étape.* Soient $\varepsilon > 0$ un réel et $n \in \mathbf{N}$ un entier. Montrons que la partie

$$U_{\varepsilon,n} := \left\{ f \in \mathscr{C} \,\middle|\, \forall x \in I,\ \exists y \in I, \quad 0 < |y-x| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| > n \right\}$$

est un ouvert de $\mathscr{C}$. Pour cela, on va vérifier que son complémentaire

$$F_{\varepsilon,n} := \{ f \in \mathscr{C} \mid \exists x \in I,\ \forall y \in I, \quad |y-x| < \varepsilon \implies |f(y)-f(x)| \leqslant n\,|y-x| \}$$

est un fermé de $\mathscr{C}$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de $F_{\varepsilon,n}$ qui converge vers une fonction $f \in \mathscr{C}$. Montrons que $f \in F_{\varepsilon,n}$. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, il existe un réel $x_k \in I$ tel que

$$\forall y \in I, \quad |y - x_k| < \varepsilon \implies |f_k(y) - f_k(x_k)| \leqslant n\,|y - x_k| \tag{1}$$

puisque $f_k \in F_{\varepsilon,n}$. La suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ prenant ses valeurs dans le compact I, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un réel $x \in I$. Quitte à réindexer la suite, on peut supposer que $x_k \longrightarrow x$. Montrons alors que ce réel x convient. Soit $y \in I$ un réel tel que $0 < |y-x| < \varepsilon$. Comme $x_k \longrightarrow x$ et $\varepsilon - |y-x| > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant N, \qquad |x_k - x| < \varepsilon - |y-x|.$$

Dès lors, pour tout entier $k \geqslant N$, l'inégalité triangulaire donne

$$|y - x_k| \leqslant |y-x| + |x - x_k| < \varepsilon.$$

ce qui, avec la relation (1), permet d'écrire

$$|f_k(y) - f_k(x_k)| \leqslant n\,|y - x_k|. \tag{2}$$

Par ailleurs, comme la suite $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, on obtient

$$f_k(x_k) \longrightarrow f(x).$$

En passant à la limite dans l'inégalité (2), on trouve

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n\,|y-x|.$$

Cela montre $f \in F_{\varepsilon,n}$. Ainsi la partie $F_{\varepsilon,n}$ est fermée dans $\mathscr{C}$.

• *Deuxième étape.* Montrons que la partie $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathscr{C}$. Soit $f \in \mathscr{C}$ une fonction et $\delta > 0$ un réel. On veut trouver une fonction $g \in U_{\varepsilon,n}$ telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Comme la fonction f est continue sur le compact I, le théorème de Heine assure qu'elle y est uniformément continue, donc il existe un réel $\alpha \in \,]0,\varepsilon[$ tel que

$$\forall x, y \in I, \qquad |x-y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \delta/4. \tag{3}$$

Soit $N > 2\pi$ un entier tel que

$$4\pi/N < \alpha \qquad \text{et} \qquad \delta N/8\pi > n. \tag{4}$$

Considérons alors la fonction

$$g\colon x \in I \longmapsto f(x) + \delta \sin Nx$$

et montrons qu'elle convient. D'abord, on a $\|f-g\|_\infty = \delta$. Pour conclure cette étape, il reste à montrer que $g \in U_{\varepsilon,n}$. Soit $x \in I$ un réel. Il existe un réel $y \in I$ tel que

$$2\pi \leqslant |Nx - Ny| \leqslant 4\pi \qquad \text{et} \qquad |\sin(Nx) - \sin(Ny)| \geqslant 1.$$

Ceci implique $2\pi/N \leqslant |x-y| \leqslant 4\pi/N$ et, avec les inégalités (4) et (3), on obtient

$$0 < |x-y| < \alpha < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| < \frac{\delta/4}{2\pi/N} = \frac{\delta N}{8\pi}.$$

De plus, on a

$$\left| \frac{\delta \sin Nx - \delta \sin Ny}{x-y} \right| \geqslant \frac{\delta}{4\pi/N} = \frac{\delta N}{4\pi}.$$

Finalement, l'inégalité triangulaire conclut

$$\left| \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \right| \geqslant \left| \frac{\delta \sin Nx - \delta \sin Ny}{x-y} \right| - \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| \geqslant \frac{\delta N}{4\pi} - \frac{\delta N}{8\pi} = \frac{\delta N}{4\pi} > n.$$

D'où $g \in U_{\varepsilon,n}$.

• *Conclusion.* Montrons que les fonctions de l'ensemble $R := \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} U_{1/n,n}$ ne sont nulle part dérivable. Soit $f \in R$ un fonction de cet ensemble et $x \in I$ un réel fixé. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, comme $f \in U_{1/n,n}$, on peut trouver un réel $x_n \in I$ tel que

$$0 < |x - x_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \left| \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \right| > n.$$

Alors $x_n \longrightarrow x$ et

$$\left| \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \right| \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi la fonction f n'est pas dérivable au point x. Ceci étant vrai pour tout réel $x \in I$, la fonction f est nulle part dérivable.

Enfin, montrons que l'ensemble R est dense dans $\mathscr{C}$. Les parties $U_{1/n,n}$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ étant toutes des ouverts denses dans l'espace complet $\mathscr{C}$ d'après ce qui précède, le théorème de Baire assure que l'ensemble R est dense dans $\mathscr{C}$. ◁

[1] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.