# **Développement 11.** Dimension du commutant

La preuve théorème principal constitue l'exercice 2.45 page 133 du livre [1]. On considère un corps $\mathbf{K}$ et un entier $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. On définit son *commutant*

$$\mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A) \coloneqq \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \mid AB = BA\}.$$

**Lemme 1.** On a $\dim_{\mathbf{K}}(\mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)) \geqslant n$.

*Preuve* Traitons d'abord le cas où la matrice $A$ est trigonalisable. À la vue de la définition de commutant, on peut supposer que la matrice $A$ est triangulaire supérieure. Il s'agit de montrer que la dimension de l'espace $S$ des solutions de l'équation

$$AX - XA = 0 \tag{1}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est supérieure à $n$. Ainsi il suffit de savoir le faire quand l'inconnue $X$ est triangulaire supérieure. Pour une telle matrice solution $X$, comme la matrice $AX - XA$ est triangulaire supérieure, le système (1) possède $(n+1)n/2$ inconnues pour autant d'équations. Cependant, les équations induites par les égalités des coefficients diagonaux, à savoir $a_{i,i}x_{i,i} = x_{i,i}a_{i,i}$, ne nous disent rien. En conclusion, le système (1) possède $(n+1)n/2$ inconnues pour $n(n+1)/2 - n$ équations linéairement indépendantes, donc l'espace $S$ intersecté avec l'espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension au moins $n$, donc l'espace $S = \mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)$ est de dimension au moins $n$.

On ne suppose plus que la matrice $A$ est trigonalisable. Soit $\mathbf{L}$ un corps de décomposition du polynôme caractéristique $\chi_A$ de la matrice $A$ dans le corps $\mathbf{K}$. Alors la matrice $A$ est trigonalisable sur ce corps $\mathbf{L}$ et le paragraphe précédent nous assure l'inégalité $\dim_{\mathbf{L}}(\mathscr{C}_{\mathbf{L}}(A)) \geqslant n$. Les deux applications

$$\varphi_{\mathbf{K}} : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \\ X & \longmapsto & AX - XA \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathbf{L}} : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbf{L}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{L}), \\ X & \longmapsto & AX - XA. \end{array} \right.$$

sont $\mathbf{K}$-linéaire et $\mathbf{L}$-linéaire et leurs matrices $M_{\mathbf{K}} \in \mathscr{M}_{n^2}(\mathbf{K})$ et $M_{\mathbf{L}} \in \mathscr{M}_{n^2}(\mathbf{L})$ sont égales, donc $\mathrm{rg}_{\mathbf{L}}(M_{\mathbf{L}}) = \mathrm{rg}_{\mathbf{L}}(M_{\mathbf{K}})$. La rang étant invariant par extension de corps, on en déduit que $\mathrm{rg}_{\mathbf{L}}(M_{\mathbf{L}}) = \mathrm{rg}_{\mathbf{K}}(M_{\mathbf{K}})$. Comme $\dim_{\mathbf{L}}(\mathscr{M}_n(\mathbf{L})) = n = \dim_{\mathbf{K}}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$, le théorème du rang permet de conclure que

$$n \leqslant \dim_{\mathbf{L}}(\mathscr{C}_{\mathbf{L}}(A)) = \dim_{\mathbf{K}}(\mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)). \qquad \triangleleft$$

**Théorème 2.** Le commutant $\mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)$ et l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ sont égaux si et seulement si les polynômes minimal $\pi_A$ et caractéristique $\chi_A$ de la matrice $A$ sont égaux.

*Preuve* On suppose $\mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A) = \mathbf{K}[A]$. L'algèbre $\mathbf{K}[A]$ étant de dimension $\deg \pi_A$, le lemme assure que $\deg \pi_A \geqslant n = \deg \chi_A$. Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme $\pi_A$ divise le polynôme $\chi_A$. Ceci implique $\pi_A = \chi_A$.

Réciproquement, on suppose $\pi_A = \chi_A$. Alors la matrice $A$ est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $e \in \mathbf{K}^n$ tel que la famille $\mathscr{B} \coloneqq (e, Ae, \dots, A^{n-1}e)$ soit une base de $\mathbf{K}^n$. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^n, \\ B & \longmapsto & Be \end{array} \right.$$

est linéaire et injective. En effet, soit $B \in \mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)$ une matrice telle que $Be = 0$. Comme $AB = BA$, on a $B(A^k e) = A^k(Be) = 0$ pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$. La famille $\mathscr{B}$ étant une base, on en déduit $B = 0$. Combinée avec le lemme, l'injectivité donne alors

$$n \leqslant \dim_{\mathbf{K}}(\mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)) \leqslant \dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^n) = n.$$

Comme $\pi_A = \chi_A$, l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ est de dimension $n$. Comme $\mathbf{K}[A] \subset \mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)$, on conclut l'égalité $\mathbf{K}[A] = \mathscr{C}_{\mathbf{K}}(A)$ $\triangleleft$

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 2*. Cassini, 2006.