Développement 29. L'enveloppe convexe du groupe orthogonal

Soit $n \geqslant 1$ un entier non nul. On note $|||\ |||_2$ la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\ \|_2$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Pour une partie $A \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\operatorname{Conv} A \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ son enveloppe convexe. On considère le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Théorème 1. L'enveloppe convexe du groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est égale à la boule unité fermée $\mathscr{B} \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ pour la norme $|||\ |||_2$.

Preuve On sait que toute matrice orthogonale est de norme une, donc $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathscr{B}$. Comme la boule $\mathscr{B}$ est convexe, on obtient une première inclusion

$$C \coloneqq \operatorname{Conv} \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathscr{B}.$$

On souhaite montrer l'inclusion réciproque. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'on dispose d'une matrice $M \in \mathscr{B} \setminus C$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach analytique (théorème I.7 de [1]), comme l'ensemble $\{M\}$ est convexe compact et l'ensemble C est convexe compact d'après le théorème de Carathéodory, il existe une forme linéaire continue $\varphi \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})'$ telle que

$$\forall B \in C, \qquad \varphi(B) < \varphi(M). \tag{1}$$

Muni du produit scalaire défini par l'égalité

$$\langle A, B \rangle \coloneqq \operatorname{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB), \qquad A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),$$

l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est euclidien. Le théorème de Riesz assure alors qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \qquad \varphi(B) = \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA). \tag{2}$$

Montrons qu'il existe une matrice $U \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $\varphi(M) \leqslant \varphi(U)$ ce qui contredira l'inégalité (1). D'après le théorème de décomposition polaire, la matrice A peut écrire sous la forme $A = OS$ avec $O \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ composées de vecteurs propres de la matrice S. Pour chaque indice $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_i \geqslant 0$ la valeur propre associé au vecteur propre e_i. L'égalité (2) permet alors d'obtenir

$$\begin{aligned}\varphi(M) = \operatorname{Tr}(MA) &= \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle MOSei, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle MOe_i, e_i \rangle\end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}|\varphi(M)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, |\langle MOe_i, e_i \rangle| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|MOe_i\|_2 \|e_i\|_2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |||M|||_2 |||O|||_2.\end{aligned}$$

Comme $|||M|||_2 \leqslant 1$ et $|||O|||_2 = 1$, on trouve

$$|\varphi(M)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Par ailleurs, on calcul

$$\varphi({}^{\mathrm{t}}O) = \operatorname{Tr}({}^{\mathrm{t}}OA) = \operatorname{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En particulier, on conclut l'inégalité $\varphi({}^{\mathrm{t}}O) \geqslant \varphi(M)$. Ceci contredit ainsi l'inégalité (1) puisque ${}^{\mathrm{t}}O \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subset C$. On en déduit l'autre inclusion $\mathscr{B} \subset C$ ce qui conclut le théorème. ◁

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* 2e tirage. Masson, 1983.
[2] Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* Ellipses, 2017.