Développement 8. Résolution de l'équation de la chaleur sur le cercle

Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'*équation de la chaleur* est le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \lim\limits_{t \to 0} u(x,t) = f(x) & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Proposition 1. On suppose que la fonction f est 1-périodique et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe une unique solution $u\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ au problème (1) qui est 1-périodique par rapport à la variable d'espace.

Preuve Montrons d'abord son existence. Pour tous réels $u \in \mathbf{R}$ et $t > 0$, la quantité

$$K(u,t) \coloneqq \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2i\pi n u} e^{-4\pi^2 n^2 t}$$

est bien définie et, grâce à la convergence normale de la série sur tout compact de $\mathbf{R}$ la définissant, on vérifie que la fonction $K(\cdot,t)\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et 1-périodique. Pour deux réels $x \in \mathbf{R}$ et $t > 0$, on peut alors considérer l'intégrale

$$u(x,t) \coloneqq \int_0^1 K(x-y,t) f(y) \,\mathrm{d}t.$$

Montrons que la fonction 1-périodique $u\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ ainsi définie vérifie le problème (1). Pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$K_n(u,t) \coloneqq e^{2i\pi n u} e^{-4\pi^2 n^2 t}, \qquad u \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

Calculons la fonction $\partial_t u$. Soit $u \in \mathbf{R}$. Les fonctions $K_n(u,\cdot)$ avec $n \in \mathbf{Z}$ sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ et elle vérifie

$$|\partial_t K_n(u,t)| = |-4\pi^2 n^2 t e^{2i\pi n u} e^{-4\pi^2 n^2 t}| = 4\pi n^2 e^{-4\pi n^2 t} \leqslant 4\pi n^2 e^{-4\pi n^2 b}$$

pour un réel $t \in [a,b]$ et un entier $n \in \mathbf{Z}$ avec $0 < a < b$. Ainsi la suite $(\partial_t K_n(u,\cdot))_{n \in \mathbf{N}}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{R}$. On peut dériver sous la somme et

$$\partial_t K(u,t) = -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 e^{2i\pi n u} e^{-4\pi^2 n^2 t}, \qquad t > 0.$$

Ensuite, le théorème de convergence dominée assure

$$\partial_t u(x,t) = \int_0^1 \partial_t K(x-y,t) f(y) \,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0$$

et la convergence de la série $\sum \int_0^1 |\partial_t K_n(u,t)| \,\mathrm{d}t$ nous donne finalement

$$\partial_t u(x,t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_0^1 \partial_t K_n(x-y,t) \,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

Avec les mêmes arguments, on montre que

$$\partial_{xx} u(x,t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_0^1 \partial_{xx} K_n(x-y,t) \,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

Enfin, pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$ et tous réels $u \in \mathbf{R}$ et $t > 0$, on a

$$\partial_t K_n(u,t) = -4\pi n^2 e^{2i\pi n u} e^{-4\pi^2 n^2 t} = \partial_{xx} K_n(u,t).$$

On en déduit

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrons que $u(x,t) \longrightarrow f(x)$ lorsque $t \longrightarrow 0$. Soit $t > 0$. Les arguments de convergence normale cités précédemment montrent que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t} f(y) \,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2i\pi n x} e^{-4\pi^2 n^2 t} \int_0^1 e^{-2i\pi n y} f(y) \,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n x} e^{-4\pi^2 n^2 t}, \end{aligned}$$

donc

$$u(x,t) - f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n x} (e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1).$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$, on a $c_n(f) = \mathrm{O}(n^{-2})$, donc la série ci-dessus converge normalement sur $\mathbf{R}_+^*$ et on peut écrire

$$\lim_{t \to 0} [u(x,t) - f(x)] = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n x} \lim_{t \to 0} (e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1) = 0.$$

Ceci conclut : la fonction u est solution du problème (1).

Montrons l'unicité. Soient u_1 et u_2 deux solutions 1-périodiques du problème (1). Alors la fonction $u \coloneqq u_1 - u_2$ est solution du même problème avec $f = 0$. Pour $t \geqslant 0$, on pose

$$E(t) \coloneqq \begin{cases} \int_0^1 u(x,t)^2 \,\mathrm{d}t & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Avec le théorème de convergence dominée, la fonction $E\colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue en 0 et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et, avec une intégration par parties, pour tout réel $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^1 2u(x,t) \partial_t u(x,t) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2u(x,t) \partial_{xx} u(x,t) \,\mathrm{d}x \\ &= -2 \int_0^1 [\partial_x u(x,t)]^2 \,\mathrm{d}x \leqslant 0. \end{aligned}$$

puisque $u(0,t) = u(1,t)$, la fonction $u(\cdot,t)$ étant 1-périodique. On en déduit que la fonction positive E est décroissante. Comme $E(0) = 0$, elle est nulle ce qui conclut l'égalité $u_1 = u_2$ et l'unicité. ◁

[1] Bernard Candelpergher. *Calcul intégral*. Cassini, 2009.