# **Développement.** Le point de Fermat d'un triangle

**Proposition 1.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés du plan. On suppose que les trois angles du triangle $ABC$ sont strictement inférieurs à $2\pi/3$. Alors la fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, \\ M \longmapsto MA + MB + MC \end{array} \right.$$

atteint son minimum en un unique point $P$, ce dernier intérieur au triangle $ABC$ et distincts de ses sommets.

*Preuve* Comme la fonction $f$ tend vers l'infini en l'infini, on recherche son minimum sur une partie compacte du plan. Soient $O$ un point quelconque fixé et $M$ un point. L'inégalité triangulaire donne $OM \leqslant OA + AM$, c'est-à-dire $MA \geqslant MO - OA$. En effectuant la même chose pour les points $B$ et $C$ et en sommant les inégalités obtenues, on trouve $f(M) \geqslant 3OM - f(O)$. Lorsque $OM > \frac{2}{3} f(O)$, on obtient alors $f(M) > f(O)$. Ainsi, si la fonction $f$ atteint son minimum, alors elle l'atteint sur le disque fermé de centre $O$ et de rayon $\frac{2}{3} f(O)$. Ce dernier étant compact, elle y atteint son minimum en un point $P$ qui est son minimum sur tout le plan.

Montrons que le point $P$ ne peut être un sommet. Notons $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles du triangles $ABC$ aux points $A$, $B$ et $C$. Au moins deux de ces trois angles sont strictement inférieurs à $\pi/2$. En effet, si tel n'était pas le cas, alors on aurait deux points, disons $B$ et $C$, tels que $\hat{B} \geqslant \pi/2$ et $\hat{C} \geqslant \pi/2$, donc

$$\hat{A} = \pi - \hat{B} - \hat{C} \leqslant 0,$$

donc $\hat{A} = 0$ ce qui est impossible car les trois points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. Dés lors, on suppose que $\hat{B} < \pi/2$ et $\hat{C} < \pi/2$. Soit $H$ le pied de la hauteur issu du point $A$. Comme le triangle $ABC$ n'est pas rectangle ni au point $B$ ni au point $C$, le point $H$ est strictement entre les points $B$ et $C$ ce qui donne $HA < BA$ puis

$$f(H) = HA + HB + HC = HA + BC < BA + BC = f(B).$$

De même, on a $f(H) < f(C)$. Donc la fonction $f$ ne peut atteindre son minimum aux points $B$ et $C$. Concernant le point $A$, c'est clair si $\hat{A} < \pi/2$ d'après le précédent paragraphe. Avec notre hypothèse, on suppose désormais $\pi/2 < \hat{A} < 2\pi/3$. Soit $M$ un point proche de $A$ et sur la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A} = 2\alpha$. En développant le produit scalaire, on a

$$MB^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \cos\alpha + AM^2 = AB^2 - 2AB \times AM \cos\alpha + AM^2$$

et, lorsque le point $M$ tend vers $A$ sur la bissectrice, on trouve

$$MB = AB\sqrt{1 - \frac{2\cos\alpha}{AB} AM + \frac{1}{AB^2} AM^2} = AB - AM\cos\alpha + \mathrm{O}(AM^2).$$

En faisant de même avec le point $B$, on trouve

$$MC = AC - AM\cos\alpha + \mathrm{O}(AM^2)$$

ce qui, en sommant, nous donne

$$f(M) = f(A) + (1 - 2\cos\alpha) AM + \mathrm{O}(AM^2).$$

Comme $\pi/2 < 2\alpha < 2\pi/3$, on a $\pi/4 < \alpha < \pi/3$, donc $\cos\alpha > 1/2$, donc $1 - 2\cos\alpha < 0$. Avec le développement limité précédent, lorsque $M$ est assez proche de $A$ sur la bissectrice, on peut écrire $f(M) < f(A)$. Ainsi la fonction $f$ n'atteint pas son minimum au point $A$.

En faisant une dessin, on peut se convaincre que le point $P$ est à l'intérieur du triangle $ABC$ : il faut distinguer les cas selon s'il est « caché » par un angle ou non et utiliser le théorème de Pythagore.

Montrons qu'il est unique. Montrons d'abord que

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 2\pi/3. \tag{1}$$

D'après ce qui précède, le minimum est atteint sur l'ouvert $\Omega \coloneqq \mathbf{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$. Sur cet ouvert, la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculons son gradient. Soit $M \coloneqq (x, y, z) \in \Omega$ un point. Notons $A = (x_A, y_A, z_A)$. On a

$$\frac{\partial}{\partial x} MA = \frac{2(x - x_A)}{2\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}} = \frac{x - x_A}{MA}$$

de telle sorte que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(M) = \frac{x - x_A}{MA} + \frac{x - x_B}{MB} + \frac{x - x_C}{MC}.$$

On obtient alors

$$\nabla f(M) = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}.$$

Avec $M = P$, on obtient $u + v + w = 0$ où l'on a considéré les vecteurs unitaires

$$u \coloneqq \frac{\overrightarrow{PA}}{PA}, \qquad v \coloneqq \frac{\overrightarrow{PB}}{PB} \qquad \text{et} \qquad w \coloneqq \frac{\overrightarrow{PC}}{PC}.$$

Ceci permet alors d'écrire

$$1 = w^2 = (u + v)^2 = 1 + 2u \cdot v + 1,$$

donc $u \cdot v = -\frac{1}{2}$, donc l'angle $\widehat{APB}$ vaut $2\pi/3$. Par symétrie, on trouve les égalités (1).

Comme l'angle $\widehat{ABP}$ est égal à $2\pi/3$, les points $A$, $B$ et $P$ ne sont pas alignés. Ainsi le point $P$ appartient à un unique cercle passant par les points $A$ et $B$ et, de même, à un unique cercle passant par les points $A$ et $C$. Ces deux cercles se coupent en les points $A$ et $P$, distincts par ce qui précède. Montrons qu'ils n'ont pas d'autre point commun. Raisonnons par l'absurde et supposons que ce ne soit pas le cas. Alors ces deux cercles se coupent en trois points distincts, donc ils sont égaux. En particulier, les points $A$, $B$, $C$ et $P$ sont sur un même cercle. Comme le point $P$ est intérieur au triangle $ABC$, c'est un des trois points $A$, $B$ et $C$ ce qui est impossible.

On sait qu'il existe un unique cercle passant par les points $A$ et $B$ et formant un angle de $2\pi/3$ avec un de ses points quelconque distincts de $A$ et $B$. Il en va de même pour les deux autres cercles. Comme le point $P$ est à l'intersection de ces cercles, on en déduit que le point $P$ est l'unique minimum de la fonction $f$ et il est strict. ◁

[1] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Quatrième édition. Cassini, 2015.