Développement 8. La formule sommatoire de Poisson et application à la fonction thêta de Jacobi

Pour une fonction $F \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, on définit sa *transformée de Fourier*

$$\hat{F}\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} F(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Pour un entier $n \in \mathbf{Z}$, on définit la fonction $e_n\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ par la relation $e_n(x) = e^{inx}$.

Théorème 1. Soient $F \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ une fonction intégrable et continue. On suppose qu'il existe deux constantes $M > 0$ et $\alpha > 1$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |F(x)| \leqslant M(1+|x|)^{-\alpha} \tag{1}$$

et que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{F}(n)| < +\infty. \tag{2}$$

Alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} F(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{F}(n). \tag{3}$$

Preuve Grâce à l'hypothèse (1), la fonction

$$f\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} F(x+n) \end{array} \right.$$

est bien définie et elle est 1-périodique. Montrons que la série la définissant converge normalement sur tout compact de $\mathbf{R}$. Soit $K \subset \mathbf{R}$ un compact. On pose

$$A \coloneqq \sup_{x\in K} |x| < +\infty.$$

Pour tout réel $x \in K$ et tout entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $|n| \geqslant 2A$, on a

$$|F(x+n)| \leqslant \frac{M}{(1+|x+n|)^\alpha} \leqslant \frac{M}{(1+|n|-|x|)^\alpha} \leqslant \frac{M}{(1+|n|-A)^\alpha} \leqslant \frac{M}{(1+|n|/2)^\alpha}.$$

On en déduit la convergence normale sur tout compact. Comme la fonction F est continue, la fonction f l'est donc aussi. Pour $m \in \mathbf{Z}$, grâce à la convergence normale, l'interversion somme-intégrale est licite et son m-ième coefficient de Fourier vaut

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi mt}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_0^1 F(t+n) e^{-2i\pi m(t+n)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_n^{n+1} F(s) e^{-2i\pi ms}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbf{R}} F(s) e^{-2i\pi ms}\,\mathrm{d}s = \hat{F}(m). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2), la suite $(S_N(f))_{N\in\mathbf{N}}$ avec $S_N(f) \coloneqq \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$ converge alors normalement sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f) e^{2i\pi mx}.$$

Le cas $x = 0$ nous donne l'égalité (3). ◁

Proposition 2. Pour tout $t > 0$, on a

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t} \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}. \tag{4}$$

Preuve Soit $t > 0$. Considérons la fonction continue et intégrable

$$F\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ x \longmapsto e^{-\pi x^2/t}. \end{array} \right.$$

Elle vérifie clairement la condition (1). Par ailleurs, pour tout réel $u \in \mathbf{R}$, on a

$$\hat{F}(u) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi ux} e^{-\pi x^2/t}\,\mathrm{d}x$$

et le théorème de convergence dominée et une intégration par parties donnent aisément

$$\begin{aligned} \hat{F}'(u) &= -2i\pi \int_{\mathbf{R}} x e^{-2i\pi ux} e^{-\pi x^2/t}\,\mathrm{d}x \\ &= -2i\pi \left(\left[-\frac{te^{-\pi x^2/t}}{2\pi} e^{-2i\pi ux} \right]_{\mathbf{R}} - \int_{\mathbf{R}} \frac{te^{-\pi x^2/t}}{2\pi} 2i\pi u e^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= -2\pi tu \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2/t} e^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}x = -2\pi tu \hat{F}(u). \end{aligned}$$

En résolvant cette équation différentielle, il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall u \in \mathbf{R}, \qquad \hat{F}(u) = Ce^{-\pi tu^2}.$$

Avec la changement de variables $u = \sqrt{\pi/t}x$, on obtient

$$\hat{F}(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2/t}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{t}.$$

Ainsi la condition (2) est satisfaite et la théorème 1 conclut l'égalité (4). ◁

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 2*. Cassini, 2009.
[2] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. 5e édition. Dunod, 2020.