Développement 14. Prolongement de la fonction gamma en une fonction méromorphe sur le plan complexe

On considère l'ouvert $\Omega \coloneqq \{\mathrm{Re} > 0\} \subset \mathbf{C}$. La *fonction gamma d'Euler*

$$\Gamma\colon \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est holomorphe. En effet, pour tout réel $t > 0$, la fonction $z \in \Omega \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est holomorphe sur l'ouvert Ω et, pour tout complexe $z \in \Omega$, la fonction $t > 0 \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Enfin, soit $K \subset \Omega$ une partie compacte. En notant $\varepsilon \coloneqq \min_{z\in K} \mathrm{Re}\, z > 0$ et $M \coloneqq \max_{z \in K} \mathrm{Re}\, z$, pour tout complexe $z \in K$, on peut écrire les majorations

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant \begin{cases} e^{(\varepsilon-1)\ln t} = 1/t^{1-\varepsilon} & \text{si } t \in \,]0,1], \\ t^{M-1}e^{-t} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

où la fonction de la variable t du membre de droite est intégrable. Le théorème d'holomorphie sous la signe intégrale assure alors la conclusion.

Théorème 1. La fonction $\Gamma\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$. De plus, cette dernière ne s'annule pas et la fonction $1/\Gamma$ est se prolonge en une fonction entière.

Preuve • *Première étape.* Montrons d'abord la relation

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \qquad z \in \Omega. \tag{1}$$

Soit $z \in \Omega$. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ et tout réel $t > 0$, on pose

$$f_n(t) \coloneqq \mathbf{1}_{]0,n[}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$. Par ailleurs, grâce à l'inégalité $1 - u \leqslant e^{-u}$ pour $u \in [0,1]$, on peut écrire la majoration

$$|f_n(t)| \leqslant e^{-t} t^{\mathrm{Re}\, z - 1}, \qquad n \in \mathbf{N}^*, \ z \in \Omega$$

où la fonction de la variable t du membre de droite est intégrable pour tout $z \in \Omega$. Le théorème de convergence dominée nous assure alors que

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variable $s = t/n$, on a

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} n^z I_n(z) \quad \text{avec} \quad I_n(z) \coloneqq \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} \, \mathrm{d}s.$$

La relation (1) se montre alors en vérifiant que

$$I_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \qquad z \in \Omega$$

par récurrence sur l'entier n : elle est vraie pour $n = 0$ et une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_{n+1}(z) &= \int_0^1 (1-s)^{n+1} e^{(z-1)\ln s} \, \mathrm{d}s \\ &= \left[(1-s)^{n+1} \frac{s^z}{z}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-s)^n \frac{s^z}{z} \, \mathrm{d}s = \frac{n+1}{z} I_n(z+1). \end{aligned}$$

• *Seconde étape.* Considérons la fonction $G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$G(z) = \lim_{n\to+\infty} G_n(z) \quad \text{avec} \quad G_n(z) \coloneqq \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}.$$

Vérifions que cette fonction G est bien définie et qu'elle est entière. Remarquons que

$$G_N(z) = zn^{-z} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right), \qquad N \in \mathbf{N}^*, \ z \in \mathbf{C}.$$

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on note $H_N \coloneqq 1 + \cdots + 1/N$. On sait que la suite $(H_N - \ln N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ converge vers une constante $\gamma \in \mathbf{R}$. Alors

$$n^{-z} = e^{-z\ln n} = e^{-z(\ln n - H_n)} e^{-zH_n}, \qquad z \in \mathbf{C}$$

ce qui permet d'écrire

$$G_N(z) = ze^{-z(\ln N - H_N)} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

On peut alors montrer que la fonction G est entière en utilisant le théorème d'holomorphie des produits infinis, le premier terme ne posant pas de problème. Montrons que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} (1 - g_n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$ avec

$$g_n(z) = (1 + z/n)e^{-z/n}.$$

Soient $R > 0$ un réel et $z \in \mathbf{C}$ un complexe vérifiant $|z| \leqslant R$. Alors

$$\begin{aligned} |1 - g_n(z)| &= \left| 1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(1 - \frac{z}{n} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{n^k k!}\right) \right| \\ &= \left| -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{n^k k!} + \frac{z^2}{n^2} - \frac{z}{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{n^k k!} \right| \leqslant \frac{e^R + R^2 + Re^R}{n^2} \end{aligned}$$

Le théorème d'holomorphie des produits assure alors que la fonction G est entière et que, les fonctions g_n avec $n \in \mathbf{N}^*$ s'annulant en les entiers $1, \ldots, -n$, elle s'annule sur tous les entiers négatifs. Ainsi la fonction $1/G$ est sans zéro et holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$.

• *Conclusion.* En se servant de la relation (1), les fonctions Γ et $1/G$ coïncident sur l'ouvert Ω. De la sorte, la fonction $1/G$ prolonge la fonction Γ en une fonction holomorphe et sans zéro sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$. On la note toujours Γ si bien que la fonction $1/\Gamma$ se prolonge en la fonction G qui est entière. ◁

[1] Éric Amar et Étienne Matheron. *Analyse complexe.* 2e édition. Cassini, 2020.
[2] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.