# **Développement 19.** Générateurs des isométries

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$.

**Lemme 1.** Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par une isométrie $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors son orthogonal $F^\perp$ est également stable par l'isométrie $f$.

*Preuve* Soit $x \in F^\perp$. On veut montrer que $f(x) \in F^\perp$, c'est-à-dire

$$\forall y \in F, \qquad \langle f(x), y\rangle = 0.$$

On fixe alors un vecteur $y \in F$. Comme l'application $f$ est une isométrie stabilisant le sous-espace vectoriel $F$, elle induit une bijection de ce sous-espace vectoriel $F$ vers lui-même, donc il existe un vecteur $x' \in F$ tel que $y = f(x')$. Enfin, l'isométrie $f$ préserve les produits scalaires ce qui permet d'écrire

$$\langle f(x), y\rangle = \langle f(x), f(x')\rangle = \langle x, x'\rangle = 0$$

puisque $x \in F^\perp$ et $x' \in F$. ◁

**Théorème 2.** Le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, tout élément de ce dernier peut s'écrire comme la composée de $p$ réflexions avec $p \leqslant n$.

**Notation.** Pour un hyperplan vectoriel $H \subset E$, on note $\sigma_H \in \mathrm{O}(E)$ la réflexion par rapport à ce dernier.

*Preuve* Effectuons une récurrence sur l'entier $n$.

• *Initialisation.* On suppose $n = 1$. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie. En particulier, il s'agit d'une application linéaire, donc elle est de la forme $f = \lambda \,\mathrm{Id}_E$ pour un certain réel $\lambda \in \mathbf{R}$. Mais cette dernière préservant la norme, on doit avoir $|\lambda| = 1$ si bien que $\lambda = \pm 1$. Ainsi l'isométrie $f = \pm \mathrm{Id}_E$ est une réflexion.

• *Hérédité.* Soit $n \geqslant 2$ un entier. On suppose que le théorème est vrai pour tous les espaces vectoriels euclidien de dimension inférieure ou égale à $n-1$. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$ et $f \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie. Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$ un vecteur. Deux cas de figure se présentent.

(i) On suppose que le vecteur $x_0$ est fixé par l'isométrie $f$. Grâce au lemme, l'hyperplan $S := x_0^\perp = (\mathbf{R}x_0)^\perp$ est stable par l'isométrie $f$. Ainsi l'endomorphisme induit $f' := f|_S$ est une isométrie de l'espace $S$ qui est de dimension $n-1$. Notre hypothèse de récurrence assure donc qu'il existe des hyperplans $G_1, \dots, G_q \subset S$ avec $q \leqslant n-1$ tels que

$$f' = \sigma_{G_1} \circ \dots \circ \sigma_{G_q}.$$

Pour chaque indice $i \in [\![1, q]\!]$, construisons l'hyperplan $H_i := G_i \oplus \mathbf{R}x_0 \subset E$. Montrons que

$$f = \sigma_{H_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_q}.$$

Comme $E = S \oplus \mathbf{R}x_0$, il suffit de vérifier cette dernière égalité en l'évaluant en le vecteur $x_0$ et en un vecteur $y \in S$. Dans le premier cas, comme $x_0 \in H_i$ pour tout indice $i \in [\![1, q]\!]$, on a

$$\sigma_{H_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_q}(x_0) = x_0 = f(x_0).$$

Dans le second cas (faire un dessin), pour tout vecteur $y \in S$, on a

$$\sigma_{H_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_q}(y) = \sigma_{G_1} \circ \dots \circ \sigma_{G_q}(y) = f'(y) = f(y).$$

Comme $q \leqslant n-1 \leqslant n$, cela termine ce premier cas.

(ii) On suppose désormais que le vecteur $x_0$ n'est pas fixé par l'isométrie $f$. Considérons alors l'hyperplan $H := (x_0 - f(x_0))^\perp$. On peut écrire

$$f(x_0) = \frac{f(x_0) + x_0}{2} + \frac{f(x_0) - x_0}{2}$$

avec $f(x_0) - x_0 \in H^\perp$ et $f(x_0) + x_0 \in H$ puisque

$$\begin{aligned}\langle f(x_0) + x_0, x_0 - f(x_0)\rangle &= \langle f(x_0), x_0\rangle - \|f(x_0)\|^2 + \|x_0\|^2 - \langle x_0, f(x_0)\rangle \\ &= \|x_0\|^2 - \|f(x_0)\|^2 = 0,\end{aligned}$$

On obtient alors $\sigma_H(f(x_0)) = x_0$. Ainsi l'isométrie $\sigma_H \circ f$ admet un point fixe et le cas (i) nous fournit alors des hyperplans $H_1, \dots, H_q \subset E$ avec $q \leqslant n-1$ tels que

$$\sigma_H \circ f = \sigma_{H_1} \circ \dots \sigma_{H_q}.$$

Comme les symétries sont des involutions, on obtient

$$f = \sigma_H \circ \sigma_{H_1} \circ \dots \sigma_{H_q}$$

avec $q + 1 \leqslant n$. ◁

**Corollaire 3.** Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n$. Tout élément du groupe $\mathrm{Isom}(\mathscr{E})$ peut s'écrire comme la composée de $p$ réflexions avec $p \leqslant n+1$.

*Preuve* Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathscr{E})$ une isométrie affine. Si elle admet un point fixe $A \in \mathscr{E}$, alors on vectoriel l'espace $\mathscr{E}$ au point $A$ et le théorème assure qu'elle s'écrit comme une composée de $p$ réflexions avec $p \leqslant n$.

Sinon elle admet un point $A \in \mathscr{E}$ qui n'est pas fixe. Notons $A' \in \mathscr{E}$ son image. Considérons l'hyperplan médiateur $\mathscr{H}$ du segment $[AA']$. Alors l'isométrie affine $\sigma_{\mathscr{H}} \circ \varphi$ fixe le point $A$ et on conclut comme dans le cas (ii) de la preuve du théorème. ◁

[1] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.