Développement 2. Groupes des isométries du cube

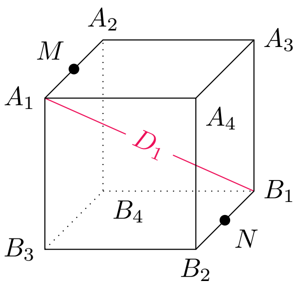
Le *groupe des isométries* (respectivement *positive*) d'un sous-ensemble $X \subset \mathbf{R}^3$ est le groupe des isométries (respectivement positive) de l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$ stabilisant l'ensemble X. On le note $\mathrm{Isom}(X)$ (respectivement $\mathrm{Isom}^+(X)$).

Théorème 1. Soit $C \subset \mathbf{R}^3$ le cube. Alors
$$\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \quad \text{et} \quad \mathrm{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Pour cela, on admet le lemme suivant.

Lemme 2. Soit $X \subset \mathbf{R}^3$ une partie. On suppose qu'elle est l'enveloppe convexe d'une partie $S \subset \mathscr{E}$ et que les points de S sont extrémaux. Alors toute isométrie stabilisant la partie X stabilise la partie S.

Preuve Les grandes diagonales, celles reliant deux sommets opposés, sont au nombre de quatre et ce sont les plus grandes distances que l'on peut trouver entre deux points du cube. Notons $D_i = (A_i B_i)$ pour $i \in \{1,2,3,4\}$ les quatre grandes diagonales.



Soient $g \in \mathrm{Isom}^+(C)$ une isométrie et $i \in \{1,2,3,4\}$ un indice fixé. Comme l'application g est affine, l'image $g(D_i)$ est une droite. De plus, comme l'application g préserve le cube C, le lemme assure qu'elle préserve les sommets, donc l'image $g(D_i)$ est de la forme $(A_j A_k)$ ou $(A_j B_k)$ avec $j \neq k$. Enfin, comme il s'agit d'une isométrie et grâce à notre premier paragraphe, l'image $g(D_i)$ est donc une droite D_j avec $j \in \{1,2,3,4\}$. Enfin, comme elle est injective, les droites $g(D_i)$ sont distinctes.

Grâce à ce dernier paragraphe, on peut donc définir une action du groupe $\mathrm{Isom}^+(C)$ sur l'ensemble des droites $\mathscr{D} := \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ par l'égalité
$$g \cdot D_i = g(D_i), \qquad g \in \mathrm{Isom}^+(C),\ i \in \{1,2,3,4\}.$$
Cela nous donne un morphisme de groupes $\rho\colon\ \mathrm{Isom}^+(C) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathscr{D})$.

Montrons que l'action ρ ainsi définie est fidèle. Soit $g \in \mathrm{Isom}^+(C)$ une isométrie telle que $\rho(g) = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. Montrons que $g = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$. Soit $i \in \{1,2,3,4\}$ un indice fixé. Comme la droite D_i est fixée par l'isométrie g, grâce au lemme, on est dans un des deux cas suivants :

(i) soit l'isométrie g permutent les points A_i et B_i ;
(ii) soit elle les laisse fixes.

On suppose qu'on se trouve dans le cas (ii). Montrons qu'elle laisse alors fixe le cube entier. On peut supposer $i = 1$. Comme $A_1 A_2 \neq A_1 B_2$ et l'application g est une isométrie, on trouve $g(A_2) \neq B_2$. Mais comme la diagonale D_2 est aussi laissée fixe et toujours avec le lemme, on obtient $g(A_2) \in \{A_2, B_2\}$. D'où $g(A_2) = A_2$. Le même raisonnement montre que $g(A_4) = A_4$. Par conséquent, l'isométrie g laisse fixe le repère affine (A_1, B_1, A_2, A_4) ce qui conclut $g = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$.

À présent, on suppose qu'on se trouve dans le cas (i) et montrons qu'il ne peut se produire. En notant $s \in \mathrm{Isom}^+(C)$ la symétrie centrale du cube, on obtient
$$s \circ g(A_i) = s(B_i) = A_i.$$
On est ainsi ramené au cas (ii) qui nous donne $s \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$. Comme $\det s = -1$, cela donne $\det g = -1$ ce qui contredit l'hypothèse $g \in \mathrm{Isom}^+(C)$. Ainsi l'action est fidèle.

Il reste à montrer que l'application ρ est surjective. Les transpositions engendrant le groupe $\mathfrak{S}(\mathscr{D})$, il suffit de montrer qu'elles sont toutes atteintes par l'application ρ. Ceci est bien le cas : pour la transposition $(D_1\ D_2) \in \mathfrak{S}(\mathscr{D})$, il suffit de considérer le retournement d'axe (MN) où les points M et N sont respectivement les milieux des segments $[A_1 A_2]$ et $[B_1 B_2]$. Finalement, l'application ρ est un isomorphisme.

Montrons la seconde isomorphie. Notons $s \in \mathrm{Isom}(C)$ la symétrie centrale du cube. Montrons que l'application $F\colon\ \mathrm{Isom}(C) \longrightarrow \mathrm{Isom}^+(C) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ définie par l'égalité
$$F(g) = \begin{cases} (g, 0) & \text{si } g \in \mathrm{Isom}^+(C), \\ (gs, 1) & \text{sinon} \end{cases}$$
est un isomorphisme de groupes. La bijectivité est claire. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes ce qui conclura.

Soit $g \in \mathrm{Isom}(C)$ une isométrie. Alors en notant O l'isobarycentre du cube, on écrit $g(O) = O$. Ainsi les applications g et s commutent : les composées gs et sg coïncident au point O et l'application linéaire associée à l'application affine g commute avec celle de la symétrie s, cette dernière se trouvant être l'application $-\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$. Concluons alors. Soient $g, h \in \mathrm{Isom}(C)$ deux isométries. Distinguons deux cas.

– On suppose $gh \in \mathrm{Isom}^+(C)$. Dans ce cas, les réels $\det g$ et $\det h$ sont de même signe. Si $\det g > 0$, alors
$$F(g)F(h) = (g,0)(h,0) = (gh, 0+0) = (gh, 0) = F(gh).$$
Si $\det g < 0$, alors
$$F(g)F(h) = (gs,1)(hs,1) = (gshs, 1+1) = (ghs^2, 0) = (gh, 0) = F(gh).$$
– On suppose $gh \notin \mathrm{Isom}^+(C)$. Comme les applications g et h jouent des rôles symétrique, on peut supposer que $\det g > 0$ de telle sorte que $\det h < 0$. Alors
$$F(g)F(h) = (g,0)(hs,1) = (ghs, 1) = F(gh). \qquad \triangleleft$$

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome second. Calvage & Mounet, 2018.