Développement. Le théorème de Lévy et son application au théorème central limite

Notons $\mathscr{C}_\mathrm{b}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ celui des fonctions continues $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tendant vers 0 en l'infini. Fixons un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Rappelons que, par la définition, une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires réelles tend en loi vers une variable aléatoire réelle X si

$$\forall f \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(\mathbf{R}), \qquad \mathbf{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbf{E}[f(X)].$$

On admettra le lemme suivant.

Lemme 1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X un variable aléatoire réelle. Alors

(i) la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend en loi vers la variable aléatoire X ;

(ii) pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$, on a $\mathbf{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbf{E}[f(X)]$.

Théorème 2 *(Lévy).* Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X un variable aléatoire réelle. Alors les points suivants sont équivalents :

(i) la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend en loi vers la variable aléatoire X ;

(ii) pour tout réel $t \in \mathbf{R}$, on a $\mathbf{E}[e^{itX_n}] \longrightarrow \mathbf{E}[e^{itX}]$.

Preuve Comme les fonctions $x \longmapsto e^{itx}$ avec $t \in \mathbf{R}$ sont continues et bornées, le sens direct est clair. Réciproquement, on suppose le point (ii). Dans un premier temps, soit $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$. Par le lemme de Riemann-Lebesgue, la fonction $f := \hat{\varphi}$ appartient à l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$. Par ailleurs, le théorème de Fubini donne

$$\mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}\Big[\int_\mathbf{R} \varphi(t) e^{-2i\pi t X_n}\,\mathrm{d}t\Big] = \int_\mathbf{R} \varphi(t)\mathbf{E}[e^{-2i\pi t X_n}]\,\mathrm{d}t.$$

Mais avec l'hypothèse (ii) et en refaisant le même calcul à l'envers, on obtient

$$\mathbf{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbf{E}[f(X)].$$

Cette dernière limite est vraie pour une transformée de Fourier f d'une fonction intégrable φ et donc pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$. Comme l'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ est dense dans l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$, cette limite tient pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$. Grâce au lemme, cela signifie que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend en loi vers la variable aléatoire X. ◁

Théorème 3 *(central limite).* Soient $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi qu'une variable aléatoire X de carré intégrable. Considérons les quantités $\mu := \mathbf{E}[X]$ et $\sigma := \mathrm{Var}[X]^{1/2}$. Alors

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\ \text{loi}\ } \mathscr{N}(0,1) \quad \text{avec} \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Preuve Quitter à centrer et à réduire les variables aléatoires considérées, on peut supposer que $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Comme la fonction caractéristique de la loi $\mathscr{N}(0,1)$ est la fonction $t \longmapsto e^{-t^2/2}$, grâce au théorème de Lévy, il suffit de montrer

$$\mathbf{E}[e^{itS_n/\sqrt{n}}] \longrightarrow e^{-t^2/2}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Comme la variable aléatoire X est de carré intégrable, sa fonction caractéristique φ_X est de classe $\mathscr{C}^2$ et elle vérifie

$$\varphi'(0) = i\mathbf{E}[X] = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi''(0) = -\mathbf{E}[X^2] = -1. \tag{1}$$

Soit $t \in \mathbf{R}$ un réel fixé. Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes, on peut écrire $\mathbf{E}[e^{itS_n/\sqrt{n}}] = \varphi(t/\sqrt{n})^n$. En faisant un développement de Taylor de la fonction φ, il existe une suite complexe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ tendant vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) = \varphi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi'(0) + \frac{t^2}{2n}\varphi''(0) + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Avec les égalités (1), on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

En appliquant le lemme suivant avec $z_n = \varepsilon_n - t^2/2 \longrightarrow -t^2/2$, on obtient

$$\mathbf{E}[e^{itS_n/\sqrt{n}}] = \varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^n \longrightarrow e^{-t^2/2}$$

ce qui conclut. ◁

Lemme 4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe tendant vers un nombre $z \in \mathbf{C}$. Alors

$$\Big(1 + \frac{z_n}{z}\Big)^n \longrightarrow e^z.$$

Preuve Comme la suite $(1 + z_n/n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 1, quitte à extraire, on peut supposer que ses termes n'appartiennent pas à la demi-droite $\mathbf{R}_-$. La détermination principale du logarithme $\mathrm{Log}\colon \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifie

$$\mathrm{Log}(1+z) = z + \mathrm{o}(z) \qquad \text{lorsque } z \longrightarrow 0.$$

de telle sorte que

$$\mathrm{Log}\Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big) = \frac{z_n}{n} + o\Big(\frac{z_n}{n}\Big).$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\Big(1 + \frac{z_n}{z}\Big)^n &= \exp\Big(\mathrm{Log}\Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big)\Big)^n \\ &= \exp\Big(n\,\mathrm{Log}\Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big)\Big) = \exp(z_n + o(z_n)) \longrightarrow \exp z.\end{aligned}$$

◁

[1] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.