Développement 36. La méthode QR

Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, ses coefficients seront notés sous la forme $A_{i,j} \in \mathbf{C}$ avec $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Théorème 1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de modules deux à deux distincts. On peut trouver une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ triés par modules décroissants tels que

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{avec} \quad \Lambda \coloneqq \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

De plus, on suppose que la matrice P admet une décomposition LU. Définissons la suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de matrice de la manière suivante :

- on pose $A_1 = A$;
- pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $A_{k+1} \coloneqq R_k Q_k$ où le couple (Q_k, R_k) est la décomposition QR de la matrice A_k.

Alors

$$(A_k)_{i,i} \longrightarrow \lambda_i, \qquad i \in [\![1, n]\!].$$

Preuve • *Égalités utiles.* Montrons d'abord, en effectuant une récurrence sur l'entier $k \geqslant 1$, que

$$A_{k+1} = \mathscr{Q}_k^* A \mathscr{Q}_k \quad \text{avec} \quad \mathscr{Q}_k \coloneqq Q_1 \cdots Q_k. \tag{1}$$

Pour $k = 1$, comme $A = Q_1 R_1$, on a

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^* A Q_1 = \mathscr{Q}_1^* A \mathscr{Q}_1.$$

Maintenant, si la relation (1) est vraie pour un rang $k \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} A_{k+2} = R_{k+1} Q_{k+1} &= Q_{k+1}^* A_{k+1} Q_{k+1} \\ &= Q_{k+1}^* \mathscr{Q}_k^* A \mathscr{Q}_k Q_{k+1} \\ &= \mathscr{Q}_{k+1}^* A \mathscr{Q}_{k+1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$\begin{aligned} A^k &= Q_1 R_1 \times \cdots \times Q_1 R_1 \\ &= Q_1 \times R_1 Q_1 \times \cdots \times R_1 Q_1 \times R_1 \\ &= Q_1 \times A_2 \times \cdots \times A_2 \times R_1 \\ &= Q_1 \times Q_2 R_2 \times \cdots \times Q_2 R_2 \times R_1 = \cdots = \mathscr{Q}_k \mathscr{R}_k. \end{aligned} \tag{2}$$

• *Une autre décomposition QR de la matrice A^k.* Notons $P = QR$ et $P^{-1} = LU$ les décompositions QR et LU des matrices P et P^{-1}. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, on écrit alors

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1} = QR \times \Lambda^k L \Lambda^{-k} \times \Lambda^k U.$$

Comme la matrice L est triangulaire inférieur de diagonale 1, on sait que

$$(\Lambda^k L \Lambda^{-k})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ (\lambda_i/\lambda_j)^k L_{i,j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

et, avec les inégalités $|\lambda_i/\lambda_j| < 1$, on peut écrire

$$\Lambda^k L \Lambda^{-k} \longrightarrow I_n.$$

Notons $\Lambda^k L \Lambda^{-k} = I_n + F_k$ avec $F_k \longrightarrow 0$. Alors

$$R \times \Lambda^k L \Lambda^{-k} = R(I_n + F_k) = (I_n + RF_kR^{-1})R.$$

Comme $F_k \longrightarrow 0$, les matrices $I_n + RF_kR^{-1}$ sont inversibles à partir d'un certain rang, donc elles admettent une unique décomposition QR

$$I_n + RF_kR^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k.$$

Comme $I_n + RF_kR^{-1} \longrightarrow 0$, en utilisant la compacité du groupe orthogonal et l'unicité de la décomposition QR, on montre que

$$\tilde{Q}_k \longrightarrow I_n \qquad \text{et} \qquad \tilde{R}_k \longrightarrow I_n.$$

Avec les différentes égalités et la relation (2), on peut écrire

$$\begin{aligned} A^k &= Q \times (I_n + RF_kR^{-1})R \times \Lambda^k U \\ &= Q\tilde{Q}_k \tilde{R}_k R \Lambda^k U = \mathscr{Q}_k \mathscr{R}_k. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut trouver une matrice diagonale D_k de coefficients diagonaux unitaires telle que la matrice $D_k^{-1} \tilde{R}_k R \Lambda^k U$ soit de diagonale strictement positive. Par unicité de la décomposition QR, on obtient alors

$$Q\tilde{Q}_k D_k = \mathscr{Q}_k \qquad \text{et} \qquad D_k^{-1} \tilde{R}_k R \Lambda^k U = \mathscr{R}_k.$$

• *Conclusion.* Comme $A = QR\Lambda R^{-1} Q^{-1}$, l'égalité (1) donne alors

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (Q\tilde{Q}_k D_k)^* \times QR\Lambda R^{-1} Q^{-1} \times Q\tilde{Q}_k D_k \\ &= D_k^* \tilde{Q}_k^* R\Lambda R^{-1} \tilde{Q}_k D_k. \end{aligned}$$

Comme $\tilde{Q}_k \longrightarrow I_n$, on obtient

$$\tilde{Q}_k^* R\Lambda R^{-1} \tilde{Q}_k \longrightarrow R\Lambda R^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Finalement, comme les matrices D_k sont diagonales, les diagonales des matrices A_{k+1} convergent vers la matrice Λ. ◁

[1] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* 3e tirage. Masson, 1982.