Développement 32. Le lemme de Morse

Lemme 1. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage $V \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ de la matrice A_0 et une application $\Phi\colon V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^{\mathrm{t}}\Phi(A) A_0 \Phi(A).$$

Preuve Considérons l'application

$$\phi\colon \left| \begin{aligned} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathscr{S}_n(\mathbf{R}), \\ M &\longmapsto {}^{\mathrm{t}}M A_0 M. \end{aligned} \right.$$

Elle est polynomiale et donc de classe $\mathscr{C}^1$. Calculons sa différentielle en l'identité. Pour une matrice $H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} \phi(I_n + H) &= (I_n + {}^{\mathrm{t}}H) A_0 (I_n + H) \\ &= A_0 + A_0 H + {}^{\mathrm{t}}H A_0 + {}^{\mathrm{t}}H A_0 H \\ &= \phi(I_n) + A_0 H + {}^{\mathrm{t}}(H A_0) + o(\|H\|^2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$d\phi(I_n)(H) = A_0 H + {}^{\mathrm{t}}(H A_0).$$

Le noyau de la différentielle $d\phi(I_n)$ est donc

$$\mathrm{Ker}[d\phi(I_n)] = \{H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid A_0 H \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})\}.$$

De plus, cette différentielle $d\phi(I_n)$ est surjective puisqu'un antécédent d'une matrice $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est la matrice $\frac{1}{2} A_0^{-1} A$.

Notons $F \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel formé des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A_0 M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Il contient l'identité. De plus, comme $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$, on peut donc écrire

$$\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}[d\phi(I_n)] \oplus F.$$

Notons $\psi\colon F \longrightarrow \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ la restriction de l'application ϕ au sous-espace vectoriel F. La différentielle $d\psi(I_n)$ est donc bijective puisque

$$\mathrm{Ker}[d\psi(I_n)] = \mathrm{Ker}[d\phi(I_n)] \cap F = \{0\}.$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $U \subset F$ de l'identité, un voisinage $V \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ de la matrice $A_0 = \psi(I_n)$ telle que la restriction $\psi|_U\colon U \longrightarrow V$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. On note $\Phi\colon V \longrightarrow U$ son inverse. On peut supposer que $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ quitte à prendre l'ouvert $U \cap U'$ où l'ensemble U' est un voisinage ouvert de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ qui existe par continuité du déterminant. Avec tout ceci, on obtient

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^{\mathrm{t}}\Phi(A) A_0 \Phi(A). \qquad \triangleleft$$

Théorème 2. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que
- l'origine est un point critique, c'est-à-dire $df(0) = 0$;
- la forme quadratique $d^2 f(0)$ n'est pas dégénérée ;
- elle est de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de 0 et un difféomorphisme $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant
- $\varphi(0) = 0$;
- pour tout point $x \in U$, on a
$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$$
où les réels $\varphi_i(x)$ sont les coordonnées du vecteurs $\varphi(x)$.

Preuve Pour tout point $x \in \Omega$, la formule de Taylor multidimensionnelle donne

$$f(x) - f(0) = df(0)(x) + \int_0^1 (1-t)\, d^2 f(tx)(h,h)\, \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$f(x) - f(0) = {}^{\mathrm{t}}x Q(x) x \quad \text{avec} \quad Q(x) \coloneqq \int_0^1 (1-t)\, d^2 f(tx)\, \mathrm{d}t \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}).$$

Par hypothèse, la matrice $Q(0) = \frac{1}{2} d^2 f(0)$ est inversible. D'après le lemme, il existe donc un voisinage $V \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ de la matrice $Q(0)$ et une application $\Phi\colon V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^{\mathrm{t}}\Phi(A) Q(0) \Phi(A).$$

Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^3$, sa différentielle seconde $d^2 f$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Le théorème de convergence dominée assure alors que la fonction Q est de classe $\mathscr{C}^1$. En particulier, elle est continue et sa préimage $U \coloneqq Q^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de l'origine qui vérifie

$$\forall x \in U, \qquad Q(x) = {}^{\mathrm{t}}\Phi(Q(x)) Q(0) \Phi(Q(x)).$$

On peut donc écrire

$$\forall x \in U, \qquad f(x) - f(0) = {}^{\mathrm{t}}\phi(x) Q(0) \phi(x) \quad \text{avec} \quad \psi(x) \coloneqq \Phi(Q(x)) x.$$

Par ailleurs, la forme quadratique $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc le théorème de Sylvester assure qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que

$${}^{\mathrm{t}}A Q(0) A = \mathrm{diag}(I_p, I_{n-p}).$$

Posons $\varphi(x) \coloneqq A^{-1}\phi(x)$ de telle sorte que

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2.$$

Notons que $\varphi(0) = 0$. Pour conclure, la différentielle de l'application $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ à l'origine est la forme $x \longmapsto A^{-1}\Phi(Q(x))$ qui est inversible puisque $\Phi(Q(x)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Le théorème d'inversion locale permet alors de conclure. $\triangleleft$

[1] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Quatrième édition. Cassini, 2015.