# **Développement 40.** La décomposition polaire du groupe orthogonal $\mathrm{O}(p,q)$

Soient $p, q \geqslant 1$ deux entiers. On considère le groupe orthogonal $\mathrm{O}(p) \subset \mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ du produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^p$ et, par ailleurs, le groupe orthogonal $\mathrm{O}(p,q) \subset \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbf{R})$ de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^{p+q}$ de matrice dans la base canonique

$$\mathscr{I} := \mathrm{diag}(I_p, -I_q) \in \mathscr{S}_{p+q}(\mathbf{R}).$$

**Théorème 1.** Il existe un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}.$$

*Preuve* On note $n := p+q$. Soit $M \in \mathrm{O}(p,q)$ une matrice. D'après la décomposition polaire, il existe deux matrices $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telles que $M = OS$. On va montrer que les matrices $S$ et $O$ appartiennent au groupe $\mathrm{O}(p,q)$. Comme $M \in \mathrm{O}(p,q)$, il suffit de montrer que la matrice $S$ y appartient. En posant $T := {}^{\mathrm{t}}MM$, on trouve $S^2 = T$. Comme le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ est stable par transposition puisque

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{O}(p,q) &\implies A\mathscr{I}\,{}^{\mathrm{t}}A = \mathscr{I} \\ &\implies {}^{\mathrm{t}}A^{-1}\mathscr{I}A^{-1} = \mathscr{I} \\ &\implies A^{-1} \in \mathrm{O}(p,q) \\ &\implies A \in \mathrm{O}(p,q), \end{aligned}$$

la matrice ${}^{\mathrm{t}}M$ y appartient et il en va de même pour la matrice $T = S^2$. Comme la matrice $S$ est définie positive, il en va de même pour la matrice $T$. Ainsi comme l'application $\exp\colon \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est un homéomorphisme, il existe une matrice $U \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ telle que $T = \exp U$. Comme $T \in \mathrm{O}(p,q)$, on écrit successivement

$$\begin{aligned} T\mathscr{I}\,{}^{\mathrm{t}}T &= \mathscr{I}, && (\star) \\ {}^{\mathrm{t}}T &= \mathscr{I}^{-1}T^{-1}\mathscr{I}, \\ {}^{\mathrm{t}}\exp(U) &= \mathscr{I}^{-1}\exp(-U)\mathscr{I}, \\ \exp({}^{\mathrm{t}}U) &= \exp(-\mathscr{I}^{-1}U\mathscr{I}), \\ {}^{\mathrm{t}}U &= -\mathscr{I}^{-1}U\mathscr{I}, && (\text{car } \exp\colon \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ est bijective}) \\ \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{t}}U &= -\mathscr{I}^{-1}\tfrac{1}{2}U\mathscr{I}, \\ &\ \vdots \\ {}^{\mathrm{t}}\exp(\tfrac{1}{2}U) &= \mathscr{I}^{-1}\exp(\tfrac{1}{2}U)^{-1}\mathscr{I}. \end{aligned}$$

Comme $\exp(\frac{1}{2}U)^2 = T$ avec $\exp(\frac{1}{2}U) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, l'unicité de la racine carrée donne $S = \exp(\frac{1}{2}U)$ et la dernière ligne prétend alors que $S \in \mathrm{O}(p,q)$ puis $O \in \mathrm{O}(p,q)$. Avec ce dernier paragraphe, comme la décomposition polaire est un homéomorphisme, cette dernière induit un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \simeq [\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)] \times [\mathrm{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})].$$

Maintenant, étudions le groupe $G := \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)$. Soit $O \in G$ une matrice qu'on écrit sous la forme

$$O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

où les matrices $A$, $B$, $C$ et $D$ sont de tailles $p \times p$, $q \times p$, $p \times q$ et $q \times q$. Comme $O \in G$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}B \\ {}^{\mathrm{t}}C & {}^{\mathrm{t}}D \end{pmatrix} \mathscr{I} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}B \\ {}^{\mathrm{t}}C & {}^{\mathrm{t}}D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ -B & -D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}AA - {}^{\mathrm{t}}BB & {}^{\mathrm{t}}AC - {}^{\mathrm{t}}BD \\ {}^{\mathrm{t}}CA - {}^{\mathrm{t}}DB & {}^{\mathrm{t}}CC - {}^{\mathrm{t}}DD \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}AA - {}^{\mathrm{t}}BB = I_p, \\ {}^{\mathrm{t}}AC - {}^{\mathrm{t}}BD = 0, \\ {}^{\mathrm{t}}CA - {}^{\mathrm{t}}DB = 0, \\ {}^{\mathrm{t}}CC - {}^{\mathrm{t}}DD = -I_q. \end{cases} \qquad (*)$$

Par ailleurs, comme $O \in G$, on peut écrire ${}^{\mathrm{t}}O\mathscr{I}O = \mathscr{I}$ et ${}^{\mathrm{t}}OO = I_n$, donc $\mathscr{I}O = O\mathscr{I}$, donc $B = C = 0$ puisque

$$\mathscr{I}O = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ -B & -D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad O\mathscr{I} = \begin{pmatrix} A & -C \\ B & -D \end{pmatrix}.$$

Avec le système $(*)$, on en déduit alors ${}^{\mathrm{t}}AA = I_p$ et ${}^{\mathrm{t}}DD = I_q$, c'est-à-dire $A \in \mathrm{O}(p)$ et $D \in \mathrm{O}(q)$. Réciproquement, toute matrice de la forme $\mathrm{diag}(A, D)$ avec $A \in \mathrm{O}(p)$ et $D \in \mathrm{O}(q)$ appartient au groupe $G$. Finalement, on obtient un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q).$$

Il reste à comprendre l'intersection $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Les implications $(\star)$ sont en fait des équivalences et on peut donc écrire

$$\exp(L) \subset \mathrm{O}(p,q) \quad \text{avec} \quad L := \{U \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}U = -\mathscr{I}^{-1}U\mathscr{I}\}.$$

L'exponentielle induit donc l'homéomorphisme

$$\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \cap L \simeq \mathrm{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}).$$

Mais en procédant comme précédemment, on montre que

$$\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \cap L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R}) \right\} \simeq \mathbf{R}^{pq}$$

ce qui conclut. ◁


[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.