Développement. Le théorème de Riesz-Fischer

Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Pour tout réel $p \in \,]0, +\infty[$, on considère l'ensemble $\mathrm{L}^p(E)$ des fonctions mesurables $f\colon E \longrightarrow \mathbf{K}$ telles que
$$\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$$
et l'ensemble $\mathrm{L}^\infty(E)$ des fonctions mesurables $f\colon E \longrightarrow \mathbf{K}$ bornées μ-presque partout. On note $\| \,\|_p$ et $\| \,\|_\infty$ leurs normes usuelles associées.

Théorème 1. Soit $p \in [1, \infty]$. Alors l'espace $\mathrm{L}^p(E)$ est complet.

Preuve On suppose que $p < \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathrm{L}^p(E)$. Par une récurrence, comme la suite est de Cauchy, on peut construire une extraction $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\| \leqslant 1/2^n.$$
Grâce à l'inégalité de Minkowski généralisé, on obtient alors
$$\Big\|\sum_{n=0}^{+\infty} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|\Big\|_p \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$
Ceci montre que
$$\int_E \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|\Big)^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| < +\infty.$$
On peut ainsi considérer la fonction définie μ-presque partout
$$f \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} (f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}) + f_{\varphi(0)} \in \mathrm{L}^p(E).$$
La suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge μ-presque partout vers la fonction f et elle tend vers cette dernière pour la norme $\| \,\|_p$ puisque, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\begin{aligned} \|f - f_{\varphi(n)}\|_p &= \Big\|\sum_{k=n}^{+\infty} (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)})\Big\|_p \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$
En conclusion, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy et elle admet une sous-suite convergente dans $\mathrm{L}^p(E)$, donc elle converge dans $\mathrm{L}^p(E)$.

On suppose que $p = \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathrm{L}^\infty(E)$. Considérons l'ensemble mesurable
$$A \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \{|f_n| \leqslant \|f_n\|_\infty\} \cap \bigcap_{n,m\in\mathbf{N}} \{|f_n - f_m| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty\} \in \mathscr{A}$$
qui est clairement de mesure pleine, c'est-à-dire que $\mu(A^{\mathrm{c}}) = 0$. La suite $(f_n \mathbf{1}_A)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de fonctions bornées de E dans $\mathbf{K}$. Mais l'espace des fonctions bornées de E dans $\mathbf{K}$ étant complet, on en déduit que cette dernière suite converge vers une fonction bornée $f\colon E \longrightarrow \mathbf{K}$. Finalement, on obtient
$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n \mathbf{1}_A - f\|_\infty \longrightarrow 0$$
ce qui conclut. ◁

Précisions

On redonne l'inégalité de Minkowski généralisée.

Proposition 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbf{R}_+$. Alors
$$\Big\|\sum_{k=0}^{+\infty} f_n\Big\|_p \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p.$$

Preuve Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, les fonctions f_k avec $k \in [\![0, n]\!]$ étant positives et mesurables, l'inégalité de Minkowski donne
$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} f_k\Big\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p.$$
Par ailleurs, comme la suite $(f_0 + \cdots + f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, le théorème de Beppo Levi assure
$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} f_k\Big\|_p \longrightarrow \Big\|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\Big\|_p.$$
En combinant ces deux limites, on en déduit la proposition. ◁