Développement. Le théorème de prolongement de Tietze

Proposition 1. Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire continue. On suppose qu'elle est *presque surjective*, c'est-à-dire qu'il existe deux réels $\alpha \in \,]0,1[$ et $C > 0$ tels que
$$\forall y \in \overline{\mathrm{B}}_F(0,1),\ \exists x \in E, \qquad \|y - Tx\| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \|x\| \leqslant C. \tag{1}$$
Alors elle est surjective et, plus précisément, on a
$$\forall y \in \overline{\mathrm{B}}_F(0,1),\ \exists x \in E, \qquad y = Tx \quad \text{et} \quad \|x\| \leqslant \frac{C}{1-\alpha}.$$

Preuve Soit $y \in E$ un vecteur tel que $\|y\| \leqslant 1$. Construisons une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de E telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait
$$\|x_n\| \leqslant C \qquad \text{et} \qquad \|y - Tx_1 - \alpha Tx_2 - \cdots - \alpha^{n-1}Tx_n\| \leqslant \alpha^n. \tag{2}$$
Pour cela, on procède par récurrence sur l'entier n. L'hypothèse (1) nous assure l'existence d'un tel vecteur x_1. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On suppose avoir construit de tels vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. Alors
$$\left\| \frac{y - Tx_1 - \alpha Tx_2 - \cdots - \alpha^{n-1}Tx_n}{\alpha^n} \right\| \leqslant 1.$$
L'hypothèse (1) fournit alors un vecteur $x_{n+1} \in E$ tel que
$$\left\| \frac{y - Tx_1 - \alpha Tx_2 - \cdots - \alpha^{n-1}Tx_n}{\alpha^n} - Tx_{n+1} \right\| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \|x_{n+1}\| \leqslant C,$$
c'est-à-dire vérifiant la condition (2).

Comme $\|\alpha^{n-1}x_n\| \leqslant C\alpha^{n-1}$ avec $\alpha \in \,]0,1[$ pour $n \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \alpha^{n-1}x_n$ converge absolument dans E. Comme l'espace E est complet, cette dernière converge dans E. Grâce à l'inégalité triangulaire, sa somme $x \in E$ vérifie alors
$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} C\alpha^{n-1} = \frac{C}{1-\alpha}.$$
Enfin, comme l'application T est continue, un passage à la limite dans l'inégalité (2) donne $\|y - Tx\| \leqslant 0$, c'est-à-dire $y = Tx$. ◁

Théorème 2. Soient X un espace métrique et $Y \subset X$ une partie fermée. Toute application continue $g_0 : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ se prolonge en une application continue $f_0 : X \longrightarrow \mathbf{R}$.

Preuve • *Première étape.* Les espaces $\mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ et $\mathscr{C}_\mathrm{b}(Y)$ des fonctions continues bornées sur X et Y sont de Banach. Considérons l'application linéaire continue
$$T : \left| \begin{array}{l} \mathscr{C}_\mathrm{b}(X) \longrightarrow \mathscr{C}_\mathrm{b}(Y) \\ \qquad f \longmapsto f|_Y. \end{array} \right.$$
Montrons qu'elle est presque surjective avec $C = 1/3$ et $\alpha = 2/3$. Soit $g \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ une fonction telle que $\|g\|_\infty \leqslant 1$. Posons
$$Y^+ \coloneqq \{x \in Y \mid 1/3 \leqslant g(x) \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad Y^- \coloneqq \{x \in Y \mid -1 \leqslant g(x) \leqslant -1/3\}$$
La fonction $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{1}{3} \frac{\mathrm{d}(x, Y^-) - \mathrm{d}(x, Y^+)}{\mathrm{d}(x, Y^-) + \mathrm{d}(x, Y^+)}, \qquad x \in X.$$
est continue et bornée, c'est-à-dire appartient à $\mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$, et elle vérifie $\|f\|_\infty \leqslant 1/3$. Montrons que $\|Tf - g\|_\infty \leqslant 2/3$. Soit $x \in Y$. On distinguons trois cas.

– Si $x \in Y^+$, alors
$$g(x) - f(x) = g(x) - \frac{1}{3} \in \left[0, \frac{2}{3}\right].$$
– Si $x \in Y^-$, alors
$$g(x) - f(x) = g(x) + \frac{1}{3} \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right].$$
– Si $x \notin Y^+ \cup Y^-$, alors
$$|g(x) - f(x)| \leqslant |g(x)| + |f(x)| \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Cela montre que $\|Tf - g\|_\infty \leqslant 2/3$. Finalement, l'application T est presque surjective. On peut appliquer la proposition : toute fonction $g \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(Y)$ est de la forme $f|_Y$ pour une fonction $f \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Autrement dit, toute fonction $g \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(Y)$ se prolonge en une fonction $f \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ avec $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

• *Deuxième étape.* Soit $g \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(Y)$ une fonction telle que $|g| < 1$ sur Y. Montrons qu'elle peut se prolonger en une fonction $f \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ telle que $|f| < 1$ sur X. Grâce à la première étape, on peut la prolonger en une fonction $h \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ telle que $|h| \leqslant 1$ sur X. Si $|h| < 1$ sur X, alors on prend $f \coloneqq h$. Sinon on suppose que
$$Z \coloneqq \{x \in X \mid |h(x)| = 1\} \neq \emptyset.$$
Considérons la fonction $f \coloneqq uh \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ où
$$u(x) = \frac{\mathrm{d}(x, Z)}{\mathrm{d}(x, Y) + \mathrm{d}(x, Z)}, \qquad x \in X.$$
qui est bien posée puisque $Y \cap Z = \emptyset$ car $|h| = |g| < 1$ sur Y. Comme $|u| \leqslant 1$ sur X, on a $|f| \leqslant |h| \leqslant 1$. De plus, lorsque $x \in Z$, on a $u(x) = 0$, donc $f(x) = 0$. On en déduit que $|f| < 1$. Pour finir, la fonction f prolonge bien la fonction h sur X puisque $u = 1$ sur Y.

• *Troisième étape.* Soit $\varphi :]-1,1[\longrightarrow \mathbf{R}$ un homéomorphisme. Alors la fonction $g \coloneqq \varphi^{-1} \circ g_0$ est continue et vérifie $|g| < 1$ sur Y. D'après la deuxième étape, elle admet un prolongement continu $f \in \mathscr{C}_\mathrm{b}(X)$ tel que $|f| < 1$ sur X. Dans ce cas, la fonction $f_0 \coloneqq \varphi \circ f$ convient. ◁

[1] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.