Développement. Sous-espace engendré par les translatés d'une fonction

Lemme 1. Soient $f_1, \dots, f_n \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions. Alors les points sont équivalents :
- la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans l'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$;
- il existe des réels $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tel que la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible.

Preuve Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible pour n'importe quels réels $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$.

Réciproquement, on suppose que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Notons $F \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ le sous-espace vectoriel de dimension n qu'elle engendre. Pour un réel $a \in \mathbf{R}$, on considère la forme linéaire

$$\mathrm{ev}_a \colon \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbf{R}, \\ f \longmapsto f(a). \end{array} \right.$$

Alors la famille $A \coloneqq (\mathrm{ev}_a)_{a \in \mathbf{R}}$ génère le dual F^* puisque, comme $A^\circ = \{0\}$, on a

$$\operatorname{Vect} A = (A^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = F^*.$$

On trouve donc des réels $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tels que la famille $(\mathrm{ev}_{x_1}, \dots, \mathrm{ev}_{x_n})$ est une base de F^*. Montrons alors que la matrice $M \coloneqq (f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible, c'est-à-dire que le noyau de sa transposée est nul. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}M$ un vecteur de son noyau. Alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0, \qquad j \in [\![1, n]\!],$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{ev}_{x_j}\Bigl(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\Bigr) = 0, \qquad j \in [\![1, n]\!].$$

La famille $(\mathrm{ev}_{x_1}, \dots, \mathrm{ev}_{x_n})$ étant une base de F^*, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_j f_i \in (F^*)^\circ = \{0\}.$$

La famille $(f_1, \dots, f_n)$ étant une base de F, on obtient alors que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ce qui conclut. ◁

Théorème 2. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors ses translatés engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie si et seulement si elle est solution d'une équation linéaire homogène à coefficients constants.

Preuve On suppose que la fonction f est solution d'une équation linéaire homogène à coefficients constants. Alors ses translatés sont aussi solution de cette équation. Or l'espace des solutions est de dimension finie, donc l'espace engendré par les translatés l'est aussi.

Réciproquement, on suppose que les fonctions $f_a \coloneqq f(\cdot + a)$ avec $a \in \mathbf{R}$ engendrent un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ de dimension finie $n \geqslant 0$. Si $n = 0$, alors il n'y a rien à faire. On suppose désormais $n \geqslant 1$. Soit $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ une base de F. En particulier, elle est libre et le lemme assure qu'ils existent des réels $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tels que la matrice $M \coloneqq (f_{a_i}(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible.

Toute fonction de F est dérivable puisque la fonction f l'est. Montrons que le sous-espace vectoriel F est stable par dérivation. Soit $g \in F$. Pour tout réel $a \in \mathbf{R}$, la fonction g_a est encore dans F, donc il existe des réels $\lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a) \in \mathbf{R}$ tels que

$$g_a = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}. \tag{1}$$

Montrons que les fonctions $\lambda_i \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sont dérivables. Soit $a \in \mathbf{R}$ un réel. Pour tout indice $j \in [\![1, n]\!]$, on écrit

$$g(a + x_j) = g_a(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j).$$

Matriciellement, on obtient

$$\begin{pmatrix} g(a + x_1) \\ \vdots \\ g(a + x_n) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}M \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}.$$

Mais comme la matrice M est inversible, cela signifie que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}M^{-1} \begin{pmatrix} g(a + x_1) \\ \vdots \\ g(a + x_n) \end{pmatrix}.$$

Comme la fonction g est dérivable, il en va de même pour les fonctions λ_i. Ainsi, en dérivant par rapport à la variable a, on obtient

$$g'(x + a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i'(a) f_{a_i}(x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

si bien que $g' \in F$ en prenant $a = 0$.

Une récurrence immédiate montre alors que toutes les fonctions de F sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que leurs dérivées appartiennent encore à F. En particulier, toutes les dérivées de la fonction f appartiennent à F. Comme ce dernier est de dimension n, la famille $(f, f', \dots, f^{(n)})$ est liée, c'est-à-dire qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ non tous nuls tels que

$$a_n f^{(n)} + \dots + a_0 f = 0.$$

Ainsi la fonction f vérifie une équation linéaire homogène à coefficients constants. ◁

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 1.* Cassini, 2001.