Développement. Les intégrales de Wallis et l'équivalent de Stirling

Proposition 1. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère l'*intégrale de Wallis*

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x.$$

Alors pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on a

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}. \tag{1}$$

Preuve Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, une intégration par parties permet d'écrire

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n+1} x \, \mathrm{d}x \\ &= [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x \times (n+1) \cos x \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

si bien qu'on obtient

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n. \tag{2}$$

Montrons à présent les égalités (1) en effectuant une récurrence sur l'entier $p \in \mathbf{N}$. Le cas $p = 0$ est immédiat puisque

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Soit $p \in \mathbf{N}$ un entier. On suppose que la relation (1) tienne au rang p. Grâce à l'égalité (2), on obtient alors

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} = W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1} p!(p+1)!} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2(p+1))!}{2^{2p+1} p!(p+1)!(2p+2)} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \end{aligned}$$

et l'autre égalité se montre de la même manière. Cela conclut la récurrence et montre l'égalité (1). ◁

Corollaire 2. Lorsque $p \longrightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{p} \left(\frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \longrightarrow \pi.$$

Preuve Comme le sinus d'un nombre est un nombre plus petit que 1, pour tout entier $p \geqslant 1$, on peut écrire

$$\forall x \in [0, \pi/2], \qquad \sin^{2p+1} x \leqslant \sin^{2p} x \leqslant \sin^{2p-1} x.$$

En intégrant cette dernière inégalité, on trouve alors $W_{2p+1} \leqslant W_{2p} \leqslant W_{2p-1}$. En combinant ceci avec la relation (2), on obtient

$$1 \leqslant \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leqslant \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}.$$

Le théorème des gendarmes et la proposition donnent alors

$$\frac{\pi}{2} \frac{2p+1}{p} \times p \left(\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \right)^2 = \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \longrightarrow 1$$

Comme $(2p+1)/p \longrightarrow 2$, on en déduit la limite recherchée. ◁

Théorème 3 *(Stirling).* Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on a

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Preuve Notons $u_n := \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} / n!$. Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) &= \ln\left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1/2} e^{-1} \right] \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3} \right) \right) - 1 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ converge de telle sorte que la suite $(\ln u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge également vers un réel $\lambda \in \mathbf{R}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge donc vers le réel $\ell := e^\lambda > 0$. On peut donc écrire

$$n! \sim \ell \sqrt{n} n^n e^{-n}. \tag{3}$$

Montrons que $\ell = \sqrt{2\pi}$. Avec cet équivalent (3), lorsque $p \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\frac{1}{p} \left(\frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{2^{4p}}{p} \left(\frac{\ell^2 p^{1+2p} e^{-2p}}{\ell (2p)^{2p+1/2} e^{-2p}} \right)^2 = \frac{\ell^2}{2}.$$

Avec le corollaire, on en déduit $\ell^2/2 = \pi$, c'est-à-dire $\ell = \sqrt{2\pi}$. ◁

[1] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.