Développement 22. Le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Théorème 1. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Pour $h \geqslant 0$, on pose

$$\omega(h) := \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in [0,1],\ |u-v| \leqslant h\}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le polynôme

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(k/n) \in \mathbf{C}[x].$$

Alors

(i) la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$;

(ii) plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \|f - B_n\|_\infty \leqslant C\omega(1/\sqrt{n}).$$

Preuve Montrons le point (i). On fixe un réel $x \in [0,1]$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre x. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Grâce au théorème de transfert, la variable aléatoire $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ vérifie

$$\mathbf{E}\Big[f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(k/n) = B_n(x)$$

de telle sorte que

$$f(x) - B_n(x) = \mathbf{E}\Big[f(x) - f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big]. \tag{1}$$

Soit $\delta \in]0,1[$. L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leqslant \mathbf{E}\Big[\Big|f(x) - f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big|\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[\Big|f(x) - f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big| \mathbf{1}_{|x - S_n/n| \leqslant \delta} + \Big|f(x) - f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big| \mathbf{1}_{|x - S_n/n| > \delta}\Big] \\ &\leqslant \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}\Big[\Big|x - \frac{S_n}{n}\Big| \geqslant \delta\Big]. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{E}[S_n/n] = x$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbf{P}\Big[\Big|f(x) - f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big| \geqslant \delta\Big] \leqslant \frac{\operatorname{Var}[S_n/n]}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Avec cette dernière relation, on trouve alors

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Ceci étant vrai pour tout réel $x \in [0,1]$, on obtient

$$\|f - B_n\|_\infty \leqslant \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

On en déduit $\limsup_{n\to+\infty} \|f - B_n\|_\infty \leqslant \omega(\delta)$. Comme la fonction f est continue et par le théorème de Heine, son module $\omega(\delta)$ tend vers zéro lorsque $\delta \longrightarrow 0$. Ceci conclut que $\|f - B_n\|_\infty \longrightarrow 0$.

Montrons désormais le point (ii). Soit $x \in [0,1]$ un réel fixé. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Le lemme appliqué aux quantités $\lambda = \sqrt{n}\,|x - S_n/n|$ et $h = 1/\sqrt{n}$ nous fournit

$$\omega\Big(\Big|x - \frac{S_n}{n}\Big|\Big) \leqslant \Big(\sqrt{n}\Big|x - \frac{S_n}{n}\Big| + 1\Big)\,\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

En reprenant l'égalité (1) puis avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leqslant \mathbf{E}\Big[\omega\Big(\Big|x - \frac{S_n}{n}\Big|\Big)\Big] \\ &\leqslant \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\, \mathbf{E}\Big[\sqrt{n}\Big|x - \frac{S_n}{n}\Big| + 1\Big] \\ &\leqslant \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \Big[1 + \sqrt{n}\Big\|x - \frac{S_n}{n}\Big\|_2\Big] \\ &= \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \Big[1 + \sqrt{n \operatorname{Var}[S_n/n]}\Big] \\ &= \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \Big[1 + \sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\Big] \leqslant \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big[1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\Big] \leqslant \frac{3}{2}\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\|f - B_n\|_\infty \leqslant C\omega(1/\sqrt{n}) \quad \text{avec} \quad C := 3/2.$$

◁

Lemme 2. Pour tous réels $\lambda, h \geqslant 0$, on a $\omega(\lambda h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h)$.

Preuve Montrons d'abord que la fonction ω est sous-additive. Soient $h_1, h_2 \geqslant 0$ deux réels. Soient $u, v \in [0,1]$ deux réels tels que $|u - v| \leqslant h_1 + h_2$. Quitte à échanger les rôles des réels u et v, on peut supposer que $v > u$ de sorte que $v - u \leqslant h_1 + h_2$.

– S'il existe un indice $i \in \{1,2\}$ tel que $v - u \leqslant h_i$, alors $|f(v) - f(u)| \leqslant \omega(h_i)$.

– Sinon on a $v - u > h_1$ et $v - u > h_2$, alors on peut écrire

$$v - u = v - (u + h_1) + u + h_1 - u \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 < v - (u + h_1) \leqslant h_2, \\ 0 \leqslant u + h_1 - u = h_1 \end{cases}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &\leqslant |f(v) - f(u + h_1)| + |f(u + h_1) - f(u)| \\ &\leqslant \omega(h_2) + \omega(h_1). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a $|f(v) - f(u)| \leqslant \omega(h_1) + \omega(h_2)$. En passant à la borne supérieure, on obtient $\omega(h_1 + h_2) \leqslant \omega(h_1) + \omega(h_2)$.

Ceci étant montré, une récurrence immédiate montre que $\omega(rh) \leqslant r\omega(h)$ pour tout entier $r \in \mathbf{N}$ et tous réels $h \geqslant 0$. Enfin, soient $\lambda, h \geqslant 0$ deux réels. Comme la fonction ω est croissante et avec ce qui précède, on conclut

$$\omega(\lambda h) \leqslant \omega((\lfloor\lambda\rfloor + 1)h) \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)\omega(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h).$$

◁

[1] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.