Leçon 106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

1. Notation. Dans toute la leçon, on considère un corps K et un K-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$

1. Structure du groupe linéaire

1.1. Premières définitions

2. Définition. Un *automorphisme* de E est une application K-linéaire et bijective de E dans E. Le *groupe linéaire* de E est l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ de ses automorphismes. On définit également l'ensemble $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices carrés inversible de taille $n \times n$ à coefficients dans K.

3. Proposition. Les ensembles $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_n(K)$ sont des groupes pour la multiplication. Ils ne sont pas abéliens dès que $n \geqslant 2$.

4. Proposition. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors l'application

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(K), \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de groupes.

5. Définition. Le *déterminant* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ est le scalaire

$$\det A \coloneqq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

où les scalaires $a_{i,j} \in K$ sont les coefficients de la matrice A.

6. Proposition. Deux matrices semblables ont le même déterminant.

7. Définition. Le déterminant d'un endomorphisme de E est le déterminant de sa matrice dans une base quelconque.

8. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors les points suivants sont équivalents :
   - l'endomorphisme u est un automorphisme ;
   - il est injectif ;
   - il est surjectif ;
   - son déterminant n'est pas nul

9. Proposition. Le déterminant induit un morphisme de groupes surjectif

$$\det \colon \mathrm{GL}(E) \longrightarrow K^\times.$$

Son noyau $\mathrm{SL}(E)$, le *groupe spécial linéaire*, vérifie la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}(E) \longrightarrow \mathrm{GL}(E) \longrightarrow K^\times \longrightarrow 1$$

et on a un isomorphisme $\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{SL}(E) \times K^\times$.

1.2. Générateurs du groupe linéaire

10. Définition. Une *dilatation* (respectivement une *transvection*) est un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ vérifiant les points suivants :
   - $\det u \neq 1$ (respectivement $\det u = 1$) ;
   - il existe un hyperplan $H \subset E$ tel que $u|_H = \mathrm{Id}_H$.

11. Proposition. Toute dilatation $u \in \mathrm{GL}(E)$ avec $\det u = \lambda \neq 1$ admet comme matrice

$$\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$$

dans une certaine base. Toute transvection $u \in \mathrm{GL}(E)$ admet comme matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

dans une certaine base.

12. Théorème. Le groupe $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections.

13. Corollaire. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les dilatations.

14. Définition. Une *matrice de transvection* est une matrice de la forme

$$I_n + \lambda E_{i,j} \in \mathrm{SL}_n(K)$$

avec $\lambda \in K^\times$ et $i \neq j$.

15. Corollaire. Toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ est de la forme

$$M = T_1 \cdots T_r \,\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda \coloneqq \det M$$

pour des matrices de transvection $T_1, \dots, T_r \in \mathrm{SL}_n(K)$.

1.3. Dérivateurs, centres et groupes projectifs

16. Proposition. Un automorphisme qui laisse invariantes toutes les droites vectorielles est une homothétie.

17. Corollaire. Les centres des groupes linéaire et spécial linéaires sont

$$\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(E)) \simeq K^\times \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Z}(\mathrm{SL}(E)) \simeq \mu_n(K).$$

18. Proposition. Les dérivateurs sont
   - $\mathrm{D}(\mathrm{GL}(E)) \simeq \mathrm{SL}(E)$ si $(n, K) \neq (2, \mathbf{F}_2)$;
   - $\mathrm{D}(\mathrm{SL}(E)) \simeq \mathrm{SL}(E)$ si $(n, K) \neq (2, \mathbf{F}_2)$ et $(n, K) \neq (2, \mathbf{F}_3)$.

19. Définition. Le *groupe projectif linéaire* et le *groupe projectif spécial linéaire* sont respectivement les quotients

$$\mathrm{PGL}(E) \coloneqq \frac{\mathrm{GL}(E)}{K^\times} \quad \text{et} \quad \mathrm{PSL}(E) \coloneqq \frac{\mathrm{SL}(E)}{\mu_n(K)}.$$

20. Théorème. Le groupe $\mathrm{PSL}(E)$ est simple si $(n, K) \neq (2, \mathbf{F}_2)$ et $(n, K) \neq (2, \mathbf{F}_3)$.

2. Le cas réel ou complexe

21. Notation. Dans cette section, le corps K sera celui des réels ou des complexes.

2.1. Les groupes orthogonaux et unitaires

22. Définition. Soit E un espace euclidien. Une *isométrie* de E est une application linéaire $u \colon E \longrightarrow E$ vérifiant

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

L'ensemble des isométries de E est noté $\mathrm{O}(E)$ quand $K = \mathbf{R}$ et $\mathrm{U}(E)$ quand $K = \mathbf{C}$.

23. Exemple. Les symétries vectorielles sont des isométries.
24. Proposition. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ ou $\mathrm{U}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé respectivement le *groupe orthogonal* ou le *groupe unitaire*.
25. Proposition. Ces derniers sont engendrés par les réflexions.
26. Définition. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est *orthogonale* si ${}^{\mathrm{t}}MM = I_n$. L'ensemble des matrices orthogonales est notée $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. On définit de même l'ensemble $\mathrm{U}_n(\mathbf{R})$.
27. Remarque. On dispose d'un isomorphisme $\mathrm{O}(E) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.
28. Exemple. La matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
est orthogonal

2.2. Sous-groupes d'isométries

29. Définition. Une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ est *positive* si $\det u = 1$. L'ensemble des isométries positives est notée $\mathrm{SO}(E)$. On définit de même l'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.
30. Proposition. L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ est isomorphes au groupe des nombres complexes de module 1.
31. Application. On peut alors donner un isomorphisme $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ qui permet de définir la notion d'angle dans un plan euclidien.
32. Définition. Pour une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la *matrice de permutation*
$$M_\sigma \coloneqq (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
33. Exemple. Pour $\sigma \coloneqq (1\ 3\ 2) \in \mathfrak{S}_3$, on a
$$M_\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
34. Remarque. Pour une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on peut écrire $\det M_\sigma = \varepsilon(\sigma)$.
35. Proposition. L'application $\sigma \in \mathfrak{S}_n \longmapsto M_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ induit les deux morphismes de groupes injectifs
$$\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A}_n \hookrightarrow \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}).$$

2.3. Topologie du groupe linéaire

36. Proposition. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe topologique dans $\mathscr{L}(E)$.
37. Proposition. Il est dense et ouvert dans $\mathscr{L}(E)$. De plus, le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs et le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ admet deux composantes connexes par arcs.
38. Proposition. Les groupes $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ sont compactes. Le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs et le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ admet deux composantes connexes par arcs.
39. Théorème. Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ une matrice symétrie réelle définie positive. Alors il existe une unique matrice réelle symétrique positive $B \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ telle que $S = B^2$.
40. Théorème *(décomposition polaire)*. L'application
$$\left| \begin{array}{c} \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \\ (O, S) \longmapsto OS \end{array} \right.$$
est un homéomorphisme.

41. Corollaire. Tout sous-groupe compact du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est égal à ce dernier.

3. Exemples d'actions du groupe linéaire

3.1. Action sur des espaces vectoriels

42. Proposition. Soient $u \in \mathrm{GL}(E)$ un isomorphisme et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de E.
43. Remarque. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit sur les sommes directes de E.
44. Proposition. Le stabilisateur d'une somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ est isomorphe au groupe $\mathrm{GL}(F_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(F_r)$.
45. Définition. Un *drapeau* est une suite finie $(F_1, \dots, F_r)$ de sous-espaces vectoriels de E vérifiant
$$\dim F_i = i, \qquad \forall i \in [\![1, r]\!].$$
46. Proposition. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux de E.
47. Application. Le nombre de matrices nilpotentes de taille $n \times n$ sur $\mathbf{F}_q$ vaut $q^{n(n-1)}$.

3.2. Action par équivalence et par conjugaison sur les matrices

48. Définition. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$ sont *équivalentes* s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $Q \in \mathrm{GL}_m(K)$ telles que $A = Q^{-1}BP$.
49. Théorème *(du rang)*. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
50. Remarque. Dans ce cas, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour trouver de telles matrices inversibles P et Q.
51. Définition. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $A = P^{-1}BP$.
52. Théorème. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes invariants de similitudes.

3.3. Applications à des problèmes de dénombrement

53. Proposition. Soit $\mathbf{F}_q$ un corps à q éléments. Alors
- $|\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1})$;
- $|\mathrm{PGL}_n(\mathbf{F}_q)| = \dfrac{|\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)|}{q-1}$;
- $|\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q)| = \dfrac{|\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)|}{q-1}$;
- $|\mathrm{PSL}_n(\mathbf{F}_q)| = \dfrac{|\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)|}{d(q-1)}$ avec $d \coloneqq \mathrm{pgcd}(n, q-1)$.

54. Exemple. On a
$$|\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)| = |\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_2)| = |\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3)| = 6.$$
55. Proposition. Les groupes suivants sont isomorphes :
- $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_3$;

D1

– $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$;
– $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$;
– $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$;
– $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$;
– $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$;

D2

56. Lemme. Un endomorphisme d'un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par le polynôme $X^q - X \in \mathbf{F}_q[X]$.

57. Théorème. Le nombre de matrices diagonalisables de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ vaut

$$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_{q-1})\in\mathbf{N}^{q-1} \\ n_1+\dots+n_{q-1}=n}} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)|}{|\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbf{F}_q)|\cdots|\mathrm{GL}_{n_{q-1}}(\mathbf{F}_q)|}.$$

[1] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.
[2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.
[3] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome second. Calvage & Mounet, 2018.
[4] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.