Leçon 154. Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

1. Notation. Soient $\mathbf{K}$ un corps et $n \geqslant 1$ un entier. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Les éléments propres

1.1. Valeurs propres et vecteurs propres

2. Définition. Une *valeur propre* de l'endomorphisme u est un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ soit injectif. Un *vecteur propre associé* est un vecteur non nul du *sous-espace propre* $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$. On définit également ces notions pour des matrices. L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme u est son *spectre*, notée $\operatorname{Sp}(u)$.
3. Exemple. La matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
admet le scalaire 0 comme valeur propre et un vecteur propre associé est $(1, 0)$. Le spectre de l'identité est réduit au singleton $\{1\}$.
4. Remarque. Le spectre est un ensemble fini et il peut être vide.
5. Proposition. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ un scalaire. Alors les points suivants sont équivalents :
   – le scalaire λ est une valeur propre de l'endomorphisme u ;
   – il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$;
   – l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas inversible ;
   – l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas surjectif.
6. Théorème. Les sous-espaces propres de l'endomorphisme u sont en somme directe.
7. Exemple. On considère la matrice $A \coloneqq \operatorname{diag}(1, -2)$. Pour des raisons de dimensions, on obtient la somme directe
$$\mathbf{K}^2 = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Ker}(A + 2I_n).$$

1.2. Liens avec les polynômes d'endomorphismes

8. Définition. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est *annulateur* de l'endomorphisme u lorsque $P(u) = 0$.
9. Exemple. Le polynôme $X - 1$ annule l'identité. Le polynôme $(X - 1)(X - 4)$ annule la matrice de l'exemple (3).
10. Théorème. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme annulateur de l'endomorphisme u. Alors toute valeur propre $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ vérifie $P(\lambda) = 0$.
11. Définition-proposition. L'ensemble
$$\{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(u) = 0\}$$
est un idéal non nul de l'anneau principal $\mathbf{K}[X]$. Son unique générateur unitaire $\pi_u \in \mathbf{K}[X]$ s'appelle le *polynôme minimal* de l'endomorphisme u.
12. Théorème. Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est une valeur propre de l'endomorphisme u si et seulement s'il est une racine son polynôme minimal π_u.
13. Définition. Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est le polynôme $\chi_A \coloneqq \det(XI_n - A) \in \mathbf{K}[X]$.
14. Exemple. Pour $a, b, c, d \in \mathbf{K}$, le polynôme caractéristique de la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
est le polynôme
$$\begin{vmatrix} X - a & -b \\ -c & X - d \end{vmatrix} = X^2 - (a + d)X + ad - bc.$$
15. Définition-proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans une base quelconque.
16. Proposition. Les valeurs propres de l'endomorphisme u sont exactement les racines de son polynôme caractéristique χ_u.
17. Théorème *(Cayley-Hamilton)*. Le polynôme caractéristique χ_u annule l'endomorphisme u.

1.3. Critères de diagonalisabilité ou de trigonalisabilité

18. Théorème *(lemme des noyaux)*. Soient $P_1, \dots, P_k \in \mathbf{K}[X]$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Notons $P \coloneqq P_1 \cdots P_k$. Alors
$$\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_k(u).$$
De plus, les projections sur chacun des sous-espaces $\operatorname{Ker} P_i(u)$ associés à cette décomposition sont des polynômes en l'endomorphisme u.
19. Définition. Un endomorphisme de E est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale (respectivement triangulaire supérieure).
20. Remarque. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base constituée de vecteurs propres de ce dernier.
21. Théorème. Les points suivants sont équivalents :
   – l'endomorphisme u est diagonalisable ;
   – l'endomorphisme u admet un polynôme annulateur scindé simple ;
   – son polynôme minimal π_u est scindé simple ;
   – son polynôme caractéristique χ_u est scindé et, pour toute racine $\lambda \in \mathbf{K}$ du polynôme χ_u de multiplicité $m \geqslant 1$, on a $m = \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$;
   – il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ deux à deux distinctes de l'endomorphisme u telles que
$$E = \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u - \lambda_p \operatorname{Id}_E).$$
22. Exemple. Tout projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $p^2 = p$, donc il est annulé par le polynôme scindé simple $X(X - 1)$, donc il est diagonalisable.
23. Théorème. Les points suivants sont équivalents :
   – l'endomorphisme u est trigonalisable ;
   – l'endomorphisme u admet un polynôme annulateur scindé ;
   – son polynôme minimal π_u est scindé ;

– son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

2. Aspects topologiques

24. Hypothèse. On suppose que le corps $\mathbf{K}$ est celui des réels ou des complexes.

2.1. Les normes matricielles

25. Définition-proposition. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbf{K}^n$. Alors l'expression
$$|||A||| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|, \qquad A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$
définit une norme sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
26. Proposition. L'application $||| \ |||$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire
$$|||AB||| \leqslant |||A|||\,|||B|||, \qquad A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$
27. Exemple. Si $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, alors
$$|||A|||_1 = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$
28. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. Alors toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ vérifie $|\lambda| \leqslant |||A|||$.

2.2. Le rayon spectral

29. Définition. Le *rayon spectrale* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est la quantité
$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$
30. Lemme. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice normale. Alors $|||A|||_2 = \rho(A)$.
31. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice. Alors
$$|||A|||_2 = \sqrt{|||A^*A|||_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$
32. Lemme. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice et $\varepsilon > 0$ un réel. Alors il existe une norme subordonnée $||| \ |||$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $|||A||| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.
33. Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice. Alors les points sont équivalents :
- $A^k \longrightarrow 0$;
- toute suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}^n$ définie par la relation $x_{k+1} = Ax_k$ pour $k \in \mathbf{N}$ converge vers le vecteur nul ;
- $\rho(A) < 1$;
- il existe une norme subordonnée $||| \ |||$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $|||A||| \leqslant 1$.

34. Lemme. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ des complexes. Notons la matrice
$$A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}),$$
le complexe $\omega := e^{2i\pi/n} \in \mathbf{C}$ et le polynôme $P := a_1 + \dots + a_n X^{n-1} \in \mathbf{C}[X]$. Alors les valeurs propres de la matrice A sont les nombres $P(\omega^k)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
35. Application. Soit $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{C}^n$ qu'en notant $P^k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, elle satisfasse la relation
$$P^{k+1} = \left(\frac{z_1^k + z_2^k}{2}, \frac{z_2^k + z_3^k}{2}, \dots, \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \right), \qquad k \in \mathbf{N}.$$
Alors la suite $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers l'élément $(g, \dots, g) \in \mathbf{C}^n$ avec
$$g := \frac{z_1^0 + \dots + z_n^0}{n}.$$

2.3. Le conditionnement et le quotient de Rayleigh

36. Définition. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbf{K}^n$. Le *conditionnement* d'une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est la quantité
$$\mathrm{cond}(A) := |||A|||\,|||A^{-1}||| \geqslant 1.$$
37. Remarque. Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et un scalaire $\alpha \in \mathbf{K}$, on a
$$\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(\alpha A).$$
38. Théorème. Soient $A, \tilde{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices telles que leur somme $A + \tilde{A}$ et la matrice A soient inversible. Soient $b, \tilde{b} \in \mathbf{K}^n$ deux vecteurs avec $b \neq 0$. On considère la solution $x \in \mathbf{K}^n$ du système $Ax = b$. Alors
- la solution $\tilde{x} \in \mathbf{K}^n$ du système $A\tilde{x} = \tilde{b}$ vérifie
$$\frac{\|\tilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{\|\tilde{b}\|}{\|b\|} \ ;$$
- la solution $\tilde{x} \in \mathbf{K}^n$ du système $\tilde{A}\tilde{x} = b$ vérifie
$$\frac{\|\tilde{x}\|}{\|x + \tilde{x}\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{|||\tilde{A}|||}{|||A|||}.$$

39. Théorème. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible. On considère la norme 2 sur $\mathbf{K}^n$. Alors
$$\mathrm{cond}_2^2(A) = \frac{\min \mathrm{Sp}(A^*A)}{\max \mathrm{Sp}(A^*A)}.$$
40. Définition. Notons $\langle \ , \ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{C}^n$. Le *quotient de Rayleigh* associée à une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est l'application
$$R_A : \left| \begin{array}{l} \mathbf{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \qquad x \longmapsto \langle Ax, x \rangle / \langle x, x \rangle. \end{array} \right.$$
41. Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbf{C}^n$ composée de vecteurs propres e_i de la matrice A associé aux valeurs propres $\lambda_i \in \mathbf{C}$ avec $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$. Alors pour tout indice $k \in [\![1, n]\!]$, on a
$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sup\{R_A(x) \mid x \in \mathrm{Vect}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}^\perp \setminus \{0\}\} \\ &= \inf\{R_A(x) \mid x \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}^\perp \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

3. Recherches approchées des valeurs propres

3.1. Localisation des valeurs propres dans le cas complexe

42. Notation. Pour un complexe $a \in \mathbf{R}$ et un réel $r > 0$, la notation $\overline{\mathrm{D}}(a, r) \subset \mathbf{C}$ désigne le disque fermé de centre a et de rayon r.

43. Théorème *(Gerschgörin-Hadamard).* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice complexe de coefficient $a_{i,j}$. Alors

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{D}}(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|).$$

44. Corollaire. Toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ vérifie

$$|\lambda| \leqslant \min\Big\{ \max_{i \in [\![1,n]\!]} (L_i + a_{i,i}), \max_{j \in [\![1,n]\!]} (C_j + a_{j,j}) \Big\}$$

avec

$$L_i \coloneqq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad C_j \coloneqq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

3.2. Recherche des valeurs propres

45. Méthode. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice à coefficient dans un corps quelconque $\mathbf{K}$. Une fois trouvée une valeur propre $\lambda \in \mathbf{K}$ — en factorisant le polynôme χ_A lorsque c'est facile —, il suffit de résoudre le système $Ax = \lambda x$ pour trouver un vecteur propre associé. Mais cette méthode est coûteuse : elle demande au plus $\mathrm{O}(n^3)$ opérations avec l'algorithme du pivot de Gauss.

46. Théorème *(décomposition QR).* Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice inversible. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que
- $A = QR$;
- la matrice Q soit unitaire ;
- la matrice R soit triangulaire supérieure où les coefficients de sa diagonale sont positifs.

D2

47. Théorème *(méthode QR).* Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de modules deux à deux distincts. On peut alors trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ triés par modules décroissants tels que

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{avec} \quad \Lambda \coloneqq \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

De plus, on suppose que la matrice P admet une décomposition LU. Définissons la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de matrice de la manière suivante :
- on pose $A_0 = A$;
- pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on pose $A_{k+1} \coloneqq R_k Q_k$ où le couple (Q_k, R_k) est la décomposition QR de la matrice A_k.

Alors la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge coefficient par coefficient vers la matrice Λ.

48. Remarque. Pour un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, on applique la méthode QR à la matrice C_P lorsque les hypothèses sont vérifiées pour trouver les racines du polynôme P.

[1] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* 3e tirage. Masson, 1982.
[2] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.
[3] Jean-Étienne Rombaldi. *Analyse matricielle.* 2e édition. EDP Sciences, 2019.
[4] Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e édition. De Boeck Supérieur, 2021.