Leçon 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

1. Notation. On considère un corps $\mathbf{K}$ et deux entiers n et m strictement positifs.

1. Action par translation

1.1. Définitions

2. Définition. On considère l'action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ définie par
$$P \cdot A = PA, \quad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}),\ A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K}).$$
Cette action est dite *à gauche*. On définit également l'action *à droite* du groupe $\mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ par $P \cdot A \coloneqq AP$.

3. Remarque. Cette action n'est ni transitive ni fidèle.

4. Proposition. On suppose $m \leqslant n$. Soient $A, A' \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ deux matrices de rang m. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
- les colonnes de A et A' engendre le même sous-espace vectoriel ;
- les matrices A et A' appartiennent à la même orbite pour l'action à gauche.

5. Définition. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ deux entiers distincts et $\lambda, \alpha \in \mathbf{K}^\times$ deux scalaires non nuls. On définit les matrices
- de *dilation* $D_i(a) \coloneqq I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$;
- de *transvection* $T_{i,j}(\lambda) \coloneqq I_n + \lambda E_{i,j}$;
- de *permutation* $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

6. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ une matrice. Notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes. Alors
- le produit $D_i(a)A$ revient à faire l'opération $L_i \longleftarrow \alpha L_i$;
- le produit $T_{i,j}(\lambda)$ revient à faire l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$;
- le produit $P_{i,j}A$ revient à faire l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$.

On agit de même sur les colonnes de la matrice A par multiplication à droite.

1.2. Algorithme du pivot de Gauss

7. Définition. Un *pivot* d'une ligne non nulle d'une matrice est le coefficient non nul situé le plus à gauche. Une matrice est *échelonnée* lorsqu'elle vérifie les deux points suivants :
- si une de ses lignes est nulles, alors ses suivantes sont nulles ;
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que ceux des lignes précédentes.

De plus, elle est *réduite* lorsque tous les pivots valent un et qu'ils sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

8. Théorème. Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite.

9. Remarque. C'est une conséquence de l'algorithme de Gauss : on multiplie successivement la matrice A par des matrices d'opérations élémentaires, nous donnant ainsi une matrice inversible P.

10. Exemple. Appliquons l'algorithme de Gauss à la matrice suivante. On obtient successivement
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \text{ et } L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1)$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (L_2 \longleftrightarrow L_3)$$
La matrice inversible en question est alors $P_{2,3}T_{3,1}(5)T_{2,1}(3)$.

11. Remarque. L'algorithme du pivot de Gauss se fait en $O(n^3)$ opérations élémentaires.

12. Théorème. Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.

13. Corollaire. Les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

1.3. Résultats de décomposition matricielle

14. Notation. On va considérer l'ensemble $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ à coefficients diagonaux strictement positifs et l'ensemble $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ des matrices symétriques définies positives de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

15. Théorème *(décomposition QR)*. Toute matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = QR$ avec $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $R \in \mathscr{T}_n^{++}(\mathbf{R})$.

16. Remarque. Le théorème est une conséquence du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

17. Application. Pour résoudre un système $Ax = b$ avec $b \in \mathbf{K}^n$, on résout le système triangulaire $Ry = {}^{\mathrm{t}}Qb$ qui ne nécessite pas l'algorithme du pivot de Gauss.

18. Théorème *(décomposition polaire)*. Toute matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = QS$ avec $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $R \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

2. Action par équivalence et par conjugaison

2.1. Action de Steinitz

19. Définition. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ sont *équivalentes* s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telles que $A = Q^{-1}BP$.

20. Théorème *(du rang)*. Deux matrices sont équivalente de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ si et seulement si elles ont le même rang.

21. Remarque. On peut remplacer le rang par la dimension du noyau.

22. Corollaire. L'action par équivalence du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ admet comme système de représentants d'orbites $\{\mathrm{diag}(I_r, 0)\}_{r \leqslant \min(n,m)}$.

23. Corollaire. Une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et sa transposée ont le même rang.

24. Proposition. Soit $\mathbf{K}$ le corps des réels ou des complexes. Pour $r \in [\![0, \min(n, m)]\!]$, on note $O_r \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ l'orbite de la matrice $\mathrm{diag}(I_r, 0)$. Alors
$$\overline{O_r} = O_0 \sqcup \cdots \sqcup O_r.$$

25. Corollaire. La limite d'une suite de matrices de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ de rang r est de rang au plus r.

2.2. Action par conjugaison sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$

26. Définition. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

27. Proposition. Deux matrices semblabes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ont les mêmes trace, déterminant, polynôme minimal et polynôme caractéristique.

28. Remarque. Attention, la réciproque est fausse : les deux matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ne sont pas semblables.

29. Définition. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) sur $\mathbf{K}$ si elle est semblable à une matrice diagonale (respectivement triangulaire).

30. Théorème. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$.

31. Corollaire. Toute matrice carrée à coefficients complexes est trigonalisable.

32. Théorème. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si
- son polynôme caractéristique est scindé ;
- les multiplicités de ses racines coïncident avec les dimensions des sous-espaces propres associés.

33. Proposition. Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ semblables sur $\mathbf{C}$ le sont sur $\mathbf{R}$.

34. Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors
$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cdot A = (\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \cdot A) \cap \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

2.3. Le cône nilpotent

35. Définition. On appelle *cône nilpotent* sur $\mathbf{K}$ l'ensemble $\mathrm{Nil}_n(\mathbf{K})$ des matrices nilpotentes $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, c'est-à-dire telle qu'il existe un entier $p \in \mathbf{N}^*$ vérifiant $A^p = I_n$.

36. Remarque. Ce n'est pas un espace vectoriel puisque la somme
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est pas nilpotente.

37. Théorème. Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini de cardinal q. Alors $|\mathrm{Nil}_n(\mathbf{F}_q)| = q^{n(n-1)}$. > 1

2.4. Réductions de Frobenius et de Jordan

38. Notation. Pour un polynôme unitaire $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré d, on note $C_p \in \mathscr{M}_d(\mathbf{K})$ sa matrice compagnon. Plus précisément, si $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, alors
$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

39. Théorème *(réduction de Frobenius)*. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe des uniques polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r \in \mathbf{K}[X]$ et des uniques sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r \subset E$ stables par l'endomorphisme u tels que > 2
- $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
- $P_r \mid \cdots \mid P_1$;
- pour tout entier $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme induit $u|_{E_i}$ sur E_i est cyclique de polynôme P_i.

De plus, il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u ait pour matrice
$$\mathrm{diag}(C_{P_1}, \dots, C_{P_r}).$$
Les polynômes P_i sont les *facteurs invariants* de l'endomorphisme u.

40. Exemple. On considère la matrice
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
de polynôme caractéristique $\chi_M \coloneqq (X-1)^2(X+1)$. Alors les seuls facteurs invariants possibles sont $X-1$, $(X-1)(X+1)$ ou χ_M. Pour des raisons de dimension/degré, l'unique facteur invariant est $\chi_M = X^3 - X^2 - X + 1$ et la matrice A est semblable à la matrice
$$C_{\chi_M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

41. Proposition. Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes facteurs invariants.

42. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs de blocs diagonaux de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{K}.$$

3. Action par congruence

3.1. Action sur les matrices symétriques

43. Notation. On considère l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

44. Définition. Deux matrices symétriques $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ sont *congruentes* s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PB\,{}^{\mathrm{t}}P$.

45. Proposition. Deux matrices symétriques sont congruentes si elles représentent le forme quadratique dans des bases différentes.

46. Théorème *(de structure de forme quadratique réelle)*. Soit (E, q) un $\mathbf{R}$-espace quadratique. Alors il existe une base et deux entiers $t, s \in \mathbf{N}$ dans laquelle la forme q soit de matrice $\mathrm{diag}(I_s, I_t, 0)$.

47. Définition. Le couple $(s, t) \in \mathbf{N}^2$ est la *signature* de la forme q.

48. Définition. Le *discriminant* d'une forme quadratique est la classe dans $\mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$ du déterminant d'une de ses matrices.

49. Théorème *(de classification des formes quadratiques)*. Deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ sont congruentes si et seulement si
- elles ont le même rang si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;
- elles ont la même signature si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
- elles ont le même discriminant si $\mathbf{K} = \mathbf{F}_q$ avec $q > 2$.

3.2. Action sur le groupe orthogonal

50. Définition. Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal s'il commute avec son adjoint f^*.
51. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base de E dans laquelle sa matrice s'écrit $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, R_1, \dots, R_s)$ pour des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R}$ et des matrices R_j de la forme

$$R_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R}).$$

52. Définition. Le *groupe orthogonal* est l'ensemble

$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \coloneqq \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}PP = I_n\}.$$

53. Proposition. Les colonnes d'une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ forment une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.
54. Corollaire. Toute matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ vérifie $|||P|||_2 = 1$.
55. Remarque. C'est le stabilisateur de la matrice identité I_n pour l'action par congruence du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.
56. Corollaire. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ admet deux composantes connexes

$$\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \coloneqq \{P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \mid \det P = 1\}$$
$$\text{et} \quad \mathrm{O}_n^-(\mathbf{R}) \coloneqq \{P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \mid \det P = -1\}.$$

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2013.
[2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome second. Calvage & Mounet, 2015.
[3] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.
[4] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.