Leçon 151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

1. Notation. Soit $\mathbf{K}$ un corps. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

1. Notion de dimension

1.1. Familles génératrices et libres

2. Définition. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E est *génératrice* si $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}\{e_i\}_{i\in I}$. L'espace vectoriel E est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie. Une famille finie $(e_1, \dots, e_n)$ de E est *libre* si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Lorsque qu'une famille finie n'est pas libre, elle est *liée*. Une *base* est une famille libre et génératrice.

3. Exemple. Les espaces $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ sont de dimension finie. Dans l'espace $\mathbf{R}^2$, la famille $((1,0),(2,0))$ est liée puisque $(2,0) = 2\cdot(1,0)$.

4. Remarque. Dès lors qu'une base de taille n est fixée, on construit naturellement un isomorphisme $E \longrightarrow \mathbf{K}^n$.

5. Proposition. Les faits suivants sont vrais :
- toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice ;
- toute sous-famille d'une famille libre est libre ;
- toute sur-famille d'une famille liée est liée ;
- une famille libre ne contient jamais le vecteur nul.

6. Théorème. On suppose que l'espace E est de dimension finie. Soient $\mathscr{G}$ une famille génératrice et $\mathscr{L}$ une famille libre vérifiant $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

7. Corollaire *(théorème de la base incomplète).* On suppose que l'espace E est de dimension finie. Alors
- on peut extraire une base de toute famille génératrice ;
- toute famille libre peut être complétée en une base.

8. Lemme. On suppose que l'espace E est engendré par une famille à n éléments. Alors toute famille contenant plus de n éléments est liée.

9. Application. Soit A un $\mathbf{K}$-algèbre de dimension finie. Toute élément $a \in A$ admet un polynôme annulateur $\pi_a \in \mathbf{K}[X]$ de degré minimal.

1.2. Définition de la dimension

10. Hypothèse. On suppose que l'espace E est de dimension finie.

11. Théorème. Toute les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est la *dimension* du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, notée $\dim_{\mathbf{K}} E$.

12. Exemple. Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ est de dimension n. De plus, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ est de dimension $2n$. Pour deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, on a $\dim_{\mathbf{K}}(E\times F) = \dim E \times \dim F$. L'espace des solutions de équations différentielles linéaires est de dimension un.

13. Application. L'action naturelle du groupe $\mathrm{GL}(E)$ sur l'espace E admet deux orbites, à savoir $\{0\}$ et $E \setminus \{0\}$.

14. Théorème. On suppose que l'espace E est de dimension n. Alors
- toute famille génératrice à n éléments est une base ;
- toute famille libre à n éléments est une base.

15. Théorème. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors l'espace F est de dimension finie et vérifie $\dim_{\mathbf{K}} F \leqslant \dim_{\mathbf{K}} E$. De plus, on a $E = F \Leftrightarrow \dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} E$.

16. Exemple. Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont égaux, il suffit de vérifier l'une des inclusions $E \subset F$ et $F \subset F$ et l'égalité de leurs dimensions.

17. Application. Une forme linéaire sur E est soit nulle soit surjective.

18. Proposition. Tout sous-espace vectoriel F admet un supplémentaire dans E.

19. Théorème. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \emptyset$ et $\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G$.

20. Proposition *(formule de Grassmann).* Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim_{\mathbf{K}}(F+G) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G - \dim_{\mathbf{K}}(F\cap G).$$

21. Théorème *(réduction des endomorphismes normaux).* Soient E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_r &&&&&& \\ &&& a_1 & -b_1 &&&& \\ &&& b_1 & a_1 &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& a_s & -b_s \\ &&&&&& b_s & a_s \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad a_j, b_j \in \mathbf{R}$$

où les réels λ_j sont les valeurs propres réelles de l'endomorphisme f.

2. Applications linéaires en dimension finie

22. Notation. On considère deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension finie. Notons $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ l'ensemble des applications $\mathbf{K}$-linéaires de E dans F.

2.1. Dimension et applications linéaires

23. Proposition. Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$. Les faits suivants sont vérifiés :
- si u est injective, alors l'image d'une famille libre par u est libre ;
- si u est surjective, alors l'image d'une famille génératrice par u est génératrice.

24. Corollaire. Deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

25. Application. Un espace E de dimension finie et son dual E^* sont isomorphes.
26. Définition. Le rang d'une applications $u \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ est le dimension de son image, c'est-à-dire l'entier $\operatorname{rg} u \coloneqq \dim_{\mathbf{K}}(\operatorname{Im} u)$.
27. Théorème *(du rang)*. Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Alors
$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}}(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u.$$
28. Corollaire. On suppose que les espaces E et F sont de même dimension. Alors une application $u \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective.
29. Application. Un endomorphisme de E est inversible, c'est-à-dire un élément du groupe $\mathrm{GL}(E)$, si et seulement s'il admet un inverse à droite (ou à gauche).
30. Application. Une $\mathbf{K}$-algèbre commutative de dimension finie est intègre si et seulement si elle est un corps.
31. Application. Soient $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{K}$ des scalaires. Alors l'application injective
$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{K}[X]_{<n} \longrightarrow \mathbf{K}^n, \\ \qquad P \longmapsto (P(b_1), \dots, P(b_n)) \end{array}\right.$$
est un isomorphisme. Il est à la base de l'interpolation de Lagrange.
32. Contre-exemple. L'hypothèse de dimension finie dans le corollaire 28 est nécessaire. En effet, l'endomorphisme $P \longmapsto P'$ de $\mathbf{K}[X]$ est surjectif et non injectif.
33. Définition. Le *commutant* d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est l'ensemble
$$\mathscr{C}(u) \coloneqq \{v \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$
34. Proposition. Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E)$. Alors $\dim_{\mathbf{K}}(\mathscr{C}(u)) \geqslant \deg \pi_u$.
35. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E)$. Alors le commutant $\mathscr{C}(u)$ et l'ensemble $\mathbf{K}[u]$ sont égaux si et seulement si les polynômes minimal π_u et caractéristique et χ_u de l'endomorphisme u coïncident.

D1

2.2. Propriété et calcul du rang

36. Définition. Le rang d'une famille finie $(e_1, \dots, e_m)$ de E est la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}_{\mathbf{K}}\{e_1, \dots, e_m\}$, notée $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_m)$.
37. Proposition. Soient $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $e_1, \dots, e_m \in E$. Alors
$$\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_m) = \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_m)).$$
38. Définition. Le rang d'une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est le rang de ces colonnes.
39. Corollaire. Soient $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$. Alors
$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} PMQ^{-1}.$$
40. Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ une matrice de rang r. Alors elle est équivalente à la matrice $\operatorname{diag}(I_r, 0)$.
41. Corollaire. Le rang est un invariant total pour l'action par équivalence du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$ sur l'espace $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.
42. Corollaire. Une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et sa transposée ont le même rang.
43. Application. Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ de rang inférieur ou égal à r est une limite de matrices de rang exactement r.
44. Application. À partir d'une matrice M, en effectuant des opérations élémentaires, l'algorithme de Gauss permet de trouver son rang.

45. Proposition. Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est de rang r si et seulement si tous les mineurs de taille $r+1$ sont nuls et il existe un mineur non nul de taille r.
46. Application. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, l'ensemble $\{A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \mid \operatorname{rg} A \leqslant r\}$ est un fermé de l'espace $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.
47. Corollaire. Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension. Alors le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{L})$ est le rang de la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et leurs polynômes minimaux coïncident.

2.3. Dualité

48. Proposition. L'espace E, son dual E^* et son bidual E^{**} ont la même dimension. En particulier, l'application
$$\left|\begin{array}{l} E \longrightarrow E^{**}, \\ x \longmapsto (u \longmapsto u(x)) \end{array}\right.$$
est un isomorphisme (et il est canonique).
49. Définition. L'*orthogonal* d'un sous-espace vectoriel F de E est l'espace
$$F^\circ \coloneqq \{u \in E^* \mid F \subset \operatorname{Ker} u\}.$$
50. Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors
$$\dim E = \dim F + \dim F^\circ.$$
51. Théorème *(réduction de Frobenius)*. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe des uniques polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r \in \mathbf{K}[X]$ et des uniques sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r \subset E$ stables par l'endomorphisme u tels que
- $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
- $P_r \mid \cdots \mid P_1$;
- pour tout entier $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme induit $u|_{E_i}$ sur E_i est cyclique de polynôme P_i.

De plus, il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u ait pour matrice
$$\operatorname{diag}(C_{P_1}, \dots, C_{P_r}).$$
Les polynômes P_i sont les *facteurs invariants* de l'endomorphisme u.

D2

52. Théorème *(de représentation de Riesz)*. Soit E un espace euclidien. Alors l'application $x \in E \longmapsto \langle x, \cdot \rangle \in E^*$ est une isométrie surjective.

3. Applications à la théorie des corps et à la géométrie

3.1. Extension finies de corps

53. Définition. Une extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ est *finie* si le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{L}$ est de dimension finie. Son *degré* est la dimension $[\mathbf{L} : \mathbf{K}] \coloneqq \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{L}$.
54. Exemple. L'extension $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ est de degré 1. L'extension $\mathbf{Q}(j)/\mathbf{Q}$ est de degré 2. L'extension $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ n'est pas finie.
55. Proposition *(multiplicativité des degrés)*. Soient $\mathbf{M}/\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ deux extensions finies. Alors $[\mathbf{M} : \mathbf{K}] = [\mathbf{M} : \mathbf{L}] \times [\mathbf{L} : \mathbf{K}]$.
56. Définition. Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension. Un élément $x \in \mathbf{L}$ est *algébrique* sur $\mathbf{K}$ s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Dans ce cas, le générateur $\pi_x \in \mathbf{K}[X]$ de l'idéal $\{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(a) = 0\}$ est le *polynôme minimal* de l'élément a sur $\mathbf{K}$.

57. Proposition. Soit $x \in \mathbf{L}$. Alors l'élément x est algébrique sur $\mathbf{K}$ si et seulement si le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}[x]$ est de dimension finie.
58. Corollaire. L'ensemble des éléments de $\mathbf{L}$ algébriques sur $\mathbf{K}$ est un corps.

3.2. Construction à la règle et au compas

59. Notation. On fixe un ensemble $E \subset \mathbf{R}^2$ contenant au moins deux éléments. Notons $F \subset \mathbf{R}$ l'ensemble des abscisses et ordonnées des points de l'ensemble E. On pose $\mathbf{K} \coloneqq \mathbf{Q}(F)$.
60. Définition. Un point du plan $\mathbf{R}^2$ est *constructible en une étape* à partir de E s'il est une intersection

- d'une droite d'extrémités dans E et d'un cercle de centre dans E ;
- de deux droites d'extrémités dans E ;
- ou de deux cercles de centres dans E.

Il est *constructible en n étapes* à partir de E s'il existe n points $P_1, \ldots, P_n = P$ du plan tels que, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, le point P_i soit constructible en une étape à partir de l'ensemble $E \cup \{P_1, \ldots, P_j\}$.
61. Proposition. Soit $(p, q) \in \mathbf{R}^2$ un point constructible en une étape à partir de E. Alors le corps $\mathbf{K}(p, q)$ est le corps $\mathbf{K}$ ou une extension quadratique de $\mathbf{K}$.
62. Théorème. Soit $(p, q) \in \mathbf{R}^2$ un point constructible en une étape à partir de E. Alors il existe une tour d'extensions $\mathbf{K}_m / \cdots / \mathbf{K}_0$ telle que

- on ait $(p, q) \in \mathbf{K}_m \subset \mathbf{R}$;
- pour tout indice $i \in [\![1, m-1]\!]$, on a $[\mathbf{K}_{i+1} : \mathbf{K}_i] = 2$.