Leçon 152. Déterminant. Exemples et applications.

1. Notation. Dans toute cette leçon, on considère un corps $\mathbf{K}$ et un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Formes multilinéaires et déterminant

1.1. Les formes multilinéaire

2. Définition. Soient E_1, ..., E_p et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application du produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans l'espace F est *p-linéaire* si ses p applications partielles sont linéaires. Lorsque $F = \mathbf{K}$, on parle de *forme multilinéaire*.

3. Exemple. L'application $(\varphi, x) \in E^* \times E \longmapsto \varphi(x)$ est une forme bilinéaire.

4. Définition. Une forme p-linéaire $f \colon E^p \longrightarrow \mathbf{K}$ est
   - *alternée* si, pour tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que $x_i = x_j$ pour deux indices $i \neq j$, alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$;
   - *antisymétrique* si, pour tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a
   $$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p), \qquad i \neq j.$$

5. Remarque. Une forme p-linéaire $f \colon E^p \longrightarrow \mathbf{K}$ est antisymétrique si et seulement si l'assertion
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \qquad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$
est satisfaite.

6. Théorème. Si le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique différente de 2, alors toute forme p-linéaire sur E^p est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

7. Proposition. Soient $f \colon E^p \longrightarrow \mathbf{K}$ une forme p-linéaire alternée et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille liée de E. Alors $f(e_1, \dots, e_p) = 0$.

1.2. Le déterminant vu comme une forme multlinéaire

8. Théorème. Dans la suite, on suppose que l'espace E est de dimension finie n. Alors l'ensemble de formes n-linéaires alternée $E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1. De plus, il existe une unique forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base fixée de E.

9. Définition. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Avec le théorème, il existe une unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathscr{B}} \colon E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$. On l'appelle le *déterminant* dans la base $\mathscr{B}$.

10. Proposition. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
   - Pour toute forme n-linéaire alternée $f \colon E^n \longrightarrow \mathbf{K}$, on a
   $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \qquad f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$
   - On a
   $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \qquad \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

11. Théorème. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ des vecteurs. Alors les propositions suivantes sont équivalents :
   - la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée ;
   - pour toute base $\mathscr{B}$ de E, on a $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$;
   - il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

1.3. Le déterminant d'une matrice ou d'un endomorphismes

12. Proposition. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors la quantité $\det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie $\mathscr{B}$.

13. Définition. Sous les mêmes notations, cette quantité est appelée le *déterminant* de l'endomorphisme u, notée $\det u$.

14. Proposition. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes.
   - On a $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.
   - Le déterminant de l'identité Id_E vaut 1.
   - L'endomorphisme u est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul et, dans ce cas, on a $\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$.

15. Définition. Le *déterminant* d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la quantité
$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$
où les scalaires $a_{i,j}$ sont ses coefficients. On le note aussi $|A|$.

16. Exemple. Pour $a, b, c, d \in \mathbf{K}$, on a
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

17. Remarque. Le déterminant d'une matrice est invariant par extension de corps.

18. Proposition. Une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

19. Proposition. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

20. Proposition. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ sa matrice dans une base quelconque. Alors $\det u = \det A$.

21. Corollaire. Deux matrices semblables ont le même déterminant.

22. Corollaire. L'application $\det \colon \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}^\times$ est un morphisme de groupes. On note $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ son noyau.

23. Proposition. Le déterminant d'une matrice est polynomiale en ses coefficients. Par conséquent, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa différentielle s'écrit
$$d\det(M)(H) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}(\mathrm{Com}\, M) H), \qquad M, H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

24. Lemme. On suppose que $\mathbf{K} \neq \mathbf{F}_2$ et $n \neq 2$. Soit G un groupe abélien. Alors tout morphisme de groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow G$ se factorise par le déterminant.

25. Théorème *(Frobenius-Zolotarev)*. Soient p un nombre premier et E un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel. Alors tout isomorphisme $u \in \mathrm{GL}(E) \subset \mathfrak{S}(E)$ vérifie
$$\varepsilon(u) = \left(\frac{\det u}{p} \right).$$
D1

2. Méthodes de calcul et exemples

2.1. Déterminant par blocs, pivot de Gauss

26. Proposition. Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ trois matrices. Alors
$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det A \times \det B.$$

27. Proposition. Les matrices de transvection, de dilation et de permutation
$$\begin{aligned} T_{i,j}(\lambda) &:= I_n + \lambda E_{i,j}, \\ D_i(\lambda) &:= I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}, \\ P_{i,j} &:= I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i} \end{aligned}$$
avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbf{K}^\times$ sont respectivement de déterminant 1, 1 et -1.

28. Remarque. En appliquant l'algorithme de Gauss à une matrice, on peut donc calculer son déterminant plus facilement.

29. Exemple. En effectuant le opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$
puis, en effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on trouve finalement
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

2.2. Mineurs, développements et comatrice

30. Définition. Un *mineur* d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ d'une matrice carré $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la déterminant $\Delta_{i,j} \in \mathbf{K}$ de la matrice A à laquelle on a enlevé la ligne i et la colonne j.

31. Proposition *(développe par rapport à une ligne ou colonne)*. On reprend les mêmes notations. Notons $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice A. Alors

– pour tout indice $j \in [\![1,n]\!]$, on a
$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \ ;$$
– pour tout indice $i \in [\![1,n]\!]$, on a
$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \ ;$$

32. Exemple. Pour $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbf{K}$, on a
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ f & g & h \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & e \\ f & h \end{vmatrix}.$$

33. Définition. Sous les mêmes notations, la *comatrice* de la matrice A est la matrice
$$\operatorname{Com} A := (\Delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

34. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. Alors
$$A\,{}^{\mathrm{t}}(\operatorname{Com} A) = {}^{\mathrm{t}}(\operatorname{Com} A) A = (\det A) I_n.$$

35. Exemple. Pour $a,b,c,d \in \mathbf{K}$ avec $ad - bc \neq 0$, alors
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.3. Applications de ces techniques

36. Proposition *(déterminant de Vandemonde)*. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K}$. La déterminant de la matrice
$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$
vaut
$$\det V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

37. Corollaire. La matrice $V(x_1, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement si les scalaires x_i sont deux à deux distincts.

38. Application. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ des complexes. Notons la matrice
$$A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}),$$
le complexe $\omega := e^{2i\pi/n} \in \mathbf{C}$ et le polynôme $P := a_1 + \cdots + a_n X^{n-1} \in \mathbf{C}[X]$. Alors
$$\det A = P(1) P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}).$$

D2

39. Proposition. Soit $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{C}^n$ qu'en notant $P^k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, elle satisfasse la relation
$$P^{k+1} = \left(\frac{z_1^k + z_2^k}{2}, \frac{z_2^k + z_3^k}{2}, \dots, \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \right), \qquad k \in \mathbf{N}.$$
Alors la suite $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers l'élément $(g, \dots, g) \in \mathbf{C}^n$ avec
$$g := \frac{z_1^0 + \cdots + z_n^0}{n}.$$

40. Proposition. Soient $a, b \in \mathbf{K}$ deux scalaires distincts. Alors
$$\begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

3. Le déterminant en pratique

3.1. Résolution des systèmes linéaires carrés

41. Théorème *(formule de Cramer).* Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ une matrice et $b \in \mathbf{K}^n$ et vecteur. On écrit
$$A = (c_1 \quad \cdots \quad c_n) \quad \text{avec} \quad c_i \in \mathbf{K}^n.$$
Alors l'unique solution $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ du système $Ax = b$ est donnée par la formule
$$x_i = \frac{\det(c_1 \quad \cdots \quad c_{i-1} \quad b \quad c_{i+1} \quad \cdots \quad c_n)}{\det A}, \qquad i \in [\![1, n]\!].$$
42. Exemple. Considérons le système
$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7, \\ x + 2y - 4z = 3, \\ 3x - 4y - 6z = 5. \end{cases}$$
Alors la première coordonnées de sa solution vaut
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}^{-1} \times \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5.$$
43. Remarque. Cette méthode n'est pas envisageable en pratique puisqu'elle requiert au plus n^4 opérations sur le corps K.

3.2. Application à la réduction des matrices

44. Définition. Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est le polynôme $\chi_A := \det(XI_n - A) \in \mathbf{K}[X]$.
45. Exemple. Pour $a, b, c, d \in A$, le polynôme caractéristique de la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
est $X^2 - (a+b)X + ad - bc$.
46. Proposition. Les valeurs propres d'une matrice sur $\mathbf{K}$ sont exactement les racines de son polynôme caractéristique sur $\mathbf{K}$.
47. Théorème *(Cayley-Hamilton).* Le polynôme minimal d'une matrice divise son polynôme caractéristique.
48. Théorème. Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
49. Théorème. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si, pour toute racine $\lambda \in \mathbf{K}$ d'ordre $m \geqslant 1$ du polynôme χ_A, on a $m = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

3.3. Interprétation géométrique et lien avec la théorie de la mesure

50. Théorème. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ un endomorphisme et $X \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ un borélien. Alors
$$\lambda(u(X)) = |\det U|\, \lambda(X).$$
51. Application. Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n$ des vecteurs. Alors le volume du parallélogramme
$$\mathscr{P} := \{\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \mid \mu_i \geqslant 0,\ \mu_1 + \cdots + \mu_n = 1\} \subset \mathbf{R}^n$$
est de volume
$$\lambda(\mathscr{P}) = |\det(v_1, \dots, v_n)|.$$
52. Théorème *(changement de variables).* Soient $\mathbf{K}$ le corps des réels ou des complexes et $\varphi \colon U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts $U, V \subset \mathbf{R}^n$. Pour toute fonction intégrable $f \colon V \longrightarrow \mathbf{K}$, on a
$$\int_V f(x)\, \mathrm{d}x = \int_U f(\varphi(u))\, |\det \mathrm{J}_\varphi(u)|\, \mathrm{d}u.$$
53. Exemple *(coordonnées polaires).* On considère le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme
$$\varphi \colon \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_- \times \{0\}), \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array} \right.$$
Pour toute fonction intégrable $f \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{K}$, on a
$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \times r \,\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta.$$
54. Application. L'intégrale de Gauss vaut
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.
[3] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.