Leçon 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

1. Notation. Soient $\mathbf{K}$ un corps et $n \geqslant 1$ un entier. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Généralité sur les sous-espaces stables

1.1. Sous-espaces stables et endomorphismes induits

2. Définition. Un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est *stable* par l'endomorphisme u si l'inclusion $u(F) \subseteq F$ est vérifiée, c'est-à-dire

$$\forall x \in F, \qquad u(x) \in F.$$

3. Proposition. Le noyau $\operatorname{Ker} u$ et l'image $\operatorname{Im} u$ sont stable par l'endomorphisme u.

4. Proposition. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme u et $m \geqslant 1$ un entier. Alors le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^m$ est stable par l'endomorphisme f.

5. Définition. L'endomorphisme induit par l'endomorphisme u sur un sous-espace vectoriel stable $F \subset E$ est l'endomorphisme

$$u|_F \colon \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow F, \\ x \longmapsto u(x). \end{array} \right.$$

6. Proposition. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par l'endomorphisme u. Soit $\mathscr{B}_F := (e_1, \dots, e_r)$ une base de F qu'on complète en une base $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A := \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F}(u|_F)$. En particulier, le polynôme caractéristique $\chi_{u|_F}$ de l'endomorphisme induit divise celui χ_u de l'endomorphisme u.

7. Proposition. Sous les mêmes hypothèse, le polynôme minimal $\pi_{u|_F}$ de l'endomorphisme induit divise celui π_u de l'endomorphisme u.

8. Corollaire. On décompose l'espace E en une somme directe $E = F \oplus G$ telle que les sous-espaces vectoriels F et G soient stables par l'endomorphisme u. Alors

$$\pi_u = \operatorname{ppcm}(\pi_{u|_F}, \pi_{u|_G}).$$

9. Proposition. Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ deux polynômes unitaires tels que $\pi_u = PQ$. Alors l'endomorphisme induit sur l'espace $\operatorname{Ker} P(u)$ est de polynôme minimal P.

1.2. Lien avec la dualité

10. Définition. L'*orthogonal* d'une partie $A \subset E$ est le sous-espace vectoriel

$$A^\perp := \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}.$$

11. Définition. Soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel quelconque. La *transposée* d'une application linéaire $u \colon E \longrightarrow F$ est l'application linéaire

$${}^{\mathrm{t}}u \colon \left| \begin{array}{l} F^* \longrightarrow E^*, \\ \varphi \longmapsto \varphi \circ u. \end{array} \right.$$

12. Théorème. Soient $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors les points suivants sont équivalents :

- le sous-espace vectoriel F est stable par l'endomorphisme u ;
- le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par l'endomorphisme ${}^{\mathrm{t}}u$;

13. Remarque. La proposition permet de faire des raisonnement par récurrence.

1.3. La semi-simplicité

14. Définition. L'endomorphisme u est *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel stable par ce dernier admet un supplémentaire stable.

15. Proposition. Un endomorphisme diagonalisable est semi-simple. La réciproque est vérifiée lorsque le corps $\mathbf{K}$ est algèbriquement clos.

16. Théorème. Un endomorphisme est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal ne possède pas de facteurs carré.

17. Corollaire. Un endomorphisme nilpotent et semi-simple est nul.

18. Corollaire. Un endomorphisme induit par un endomorphisme semi-simple l'est encore.

2. Application à la réduction des endomorphismes

2.1. Le lemme des noyaux et critères de diagonalisabilité ou de trigonalisabilité

19. Théorème *(lemme des noyaux)*. Soient $P_1, \dots, P_k \in \mathbf{K}[X]$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Notons $P := P_1 \cdots P_k$. Alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_k(u).$$

De plus, les projections sur chacun des sous-espaces $\operatorname{Ker} P_i(u)$ associés à cette décomposition sont des polynômes en l'endomorphisme u.

20. Proposition. Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé simple est diagonalisable.

21. Exemple. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique est $(X-1)(X-3)$.

22. Contre-exemple. La réciproque est fausse puisque l'identité est diagonalisable et son polynôme caractéristique vaut $(X-1)^n$.

23. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors les points suivants sont équivalents :

- l'endomorphisme u est diagonalisable ;
- l'endomorphisme u admet un polynôme annulateur scindé simple ;
- son polynôme minimal π_u est scindé simple ;
- son polynôme caractéristique χ_u est scindé et, pour toute racine $\lambda \in \mathbf{K}$ du polynôme χ_u de multiplicité m, on a $m = \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$;
- il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ deux à deux distinctes de l'endomor-

phisme u telles que

$$E = \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u - \lambda_p \operatorname{Id}_E).$$

24. Exemple. Tout projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $p^2 = p$, donc il est annulé par le polynôme scindé simple $X(X-1)$, donc il est diagonalisable.

25. Corollaire. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme diagonalisable $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors l'endomorphisme $u|_F \in \mathscr{L}(F)$ est diagonalisable.

26. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors les points suivants sont équivalents :

- l'endomorphisme u est trigonalisable ;
- l'endomorphisme u admet un polynôme annulateur scindé ;
- son polynôme minimal π_u est scindé ;
- son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

27. Corollaire. Si le corps $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme est trigonalisable.

2.2. Les endomorphismes cycliques et la réduction de Frobenius

28. Définition. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

29. Proposition. On note $C_P \in \mathscr{M}_d(\mathbf{K})$ la matrice compagnon d'un polynôme unitaire $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré d. Alors $\chi_{C_P} = P$.

D1

30. Lemme. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Pour un vecteur $x \in E$, on considère l'unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbf{K}[X]$ engendrant l'idéal

$$\{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\} \subset \mathbf{K}[X].$$

Alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

31. Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, le sous-espace vectoriel

$$\{P(u)(x) \mid P \in \mathbf{K}[X]\} = \operatorname{Vect}_{\mathbf{K}}(x, \dots, u^{k-1}(x))$$

est stable par l'endomorphisme u et de dimension $k = \deg \pi_u$.

32. Proposition. Les points suivants sont équivalents :

- l'endomorphisme u est cyclique ;
- $\pi_u = \chi_u$;
- il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon ;
- le commutant de l'endomorphisme u est égal à l'ensemble $\mathbf{K}[u]$.

D1

33. Théorème *(réduction de Frobenius)*. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe un unique entier $r \geqslant 1$, des uniques polynômes unitaires non constants $P_1, \dots, P_r \in \mathbf{K}[X]$ et des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r \subset E$ stables par l'endomorphisme u tels que

- $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
- $P_r \mid \cdots \mid P_1$;
- pour tout entier $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme $u|_{E_i}$ induit sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique de polynôme minimal P_i.

La suite $(P_1, \dots P_r)$ sont les *invariants de similitude* de l'endomorphisme u.

34. Corollaire. Avec les mêmes hypothèses et notations, il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u ait pour matrice

$$\operatorname{diag}(C_{P_1}, \dots, C_{P_r}).$$

De plus, on a $P_1 = \pi_u$ et $P_1 \cdots P_r = \chi_u$.

3. Stabilité et commutation

3.1. Réduction simultanée et application à la décomposition de Dunford

35. Lemme. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Alors le noyau $\operatorname{Ker} u$ et l'image $\operatorname{Im} u$ sont stables par l'endomorphisme v.

36. Exemple. Pour un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, on retrouve que le noyau $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par l'endomorphisme u et, en particulier, c'est le cas pour les sous-espaces propres et caractéristiques de ce dernier.

37. Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables (respectivement trigonalisables) commutant deux à deux. Alors il existe une base de E dans laquelle les matrices des endomorphismes u_i avec $i \in I$ sont toutes diagonales (respectivement triangulaires supérieures).

38. Contre-exemple. La condition de commutativité est nécessaire : les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont diagonalisables, mais elles ne sont pas co-diagonalisable.

39. Exemple. La somme ou la composée de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent est encore diagonalisable.

40. Théorème *(Dunford)*. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que

- $u = d + n$;
- les endomorphismes d et n commutent ;
- ils sont respectivement diagonalisable et nilpotent.

De plus, les endomorphismes d et n appartiennent à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. L'écriture $u = d + n$ est la *décomposition de Dunford* de l'endomorphisme u.

41. Exemple. Attention, la décomposition de Dunford de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais $A = A + 0$.

42. Application. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable si et seulement si son exponentielle $\exp A$ l'est.

3.2. Les endomorphismes normaux

43. Définition. Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *normal* s'il commute avec son adjoint, c'est-à-dire $u \circ u^* = u^* \circ u$. Il est *symétrique* si $u^* = u$.

44. Remarque. Un endomorphisme symétrique est normal.

45. Lemme. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'adjoint u^*.

46. Lemme. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal et $\lambda \in \mathbf{K}$ une de ses valeurs propres. Alors le sous-espace $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^\perp$ est stable par l'endomorphisme u.

47. THÉORÈME *(spectral)*. Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormée.

48. THÉORÈME. Soient E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme u est de la forme

D2

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, \tau_1, \dots, \tau_s)$$

où l'on a noté

$$\tau_i \coloneqq \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \qquad i \in [\![1, s]\!]$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s, a_1, b_1, \dots, a_s, b_s \in \mathbf{R}$.

[1] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. 2e édition. H&K, 2005.
[2] Xavier GOURDON. *Algèbre*. 2e édition. Ellipses, 2009.