Leçon 155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

1. Notation. Soient $\mathbf{K}$ un corps et $n \geqslant 1$ un entier. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Outils de réduction

1.1. Valeurs propres et vecteurs propres

[3] 2. Définition. Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est une *valeur propre* de l'endomorphisme f si l'endomorphisme $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif. L'ensemble de ses valeurs propres est son *spectre* et on le note $\operatorname{Sp}(f)$.

3. Définition. Un *vecteur propre* associée à une valeur propre $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ est un vecteur non nul du noyau $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

4. Remarque. On définit, de même, les notions de vecteurs et valeurs propres pour des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$: ce sont ceux de l'endomorphisme induit par la matrice.

5. Exemple. La matrice identité I_n vérifie $\operatorname{Sp}(I_n) = \{0\}$ et tout vecteur de $\mathbf{K}^n$ est propre pour la valeur propre 0. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$$

admet 1 comme valeur propre et un vecteur propre associé est $(1,0)$. Dans $\mathbf{R}^2$, la rotation d'angle $\theta \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ n'a pas de valeur propre.

[3] 6. Proposition. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$. Alors le noyau $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par l'endomorphisme f. On l'appelle le *sous-espace propre* de l'endomorphisme f associé à la valeur propre λ.

7. Proposition. Les espaces propres de l'endomorphisme f sont en somme directe.

8. Définition. L'endomorphisme f est *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

9. Exemple. Les matrices diagonales sont diagonalisables.

10. Proposition. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E constitué de vecteurs propres de l'endomorphisme f.

1.2. Polynômes d'endomorphismes et polynôme caractéristique

[3] 11. Définition. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbf{K}[X]$. On définit l'endomorphisme

$$P(f) \coloneqq \sum_{i=0}^{d} a^i f^i \in \mathscr{L}(E).$$

12. Proposition. L'ensemble $I \coloneqq \{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(f) = 0\}$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbf{K}[X]$. On note $\pi_f \in \mathbf{K}[X]$ l'unique polynôme unitaire tel que $I = \pi_f \mathbf{K}[X]$. Ce polynôme π_f est le *polynôme minimal* de l'endomorphisme f.

13. Définition. Le *polynôme caractéristique* de l'endomorphisme f est le polynôme

$$\chi_f \coloneqq \det(f - X \operatorname{Id}_E) \in \mathbf{K}[X].$$

14. Théorème. Un scalaire de $\mathbf{K}$ est une valeur propre de l'endomorphisme f si et seulement s'il est racine du polynôme χ_f.

15. Remarque. Si le corps $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, alors l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre.

16. Exemple. La matrice

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$$

est de polynôme caractéristique $\chi_A = X(X-5)$, donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0, 5\}$.

17. Théorème. Les points suivants sont équivalents : [3]

- l'endomorphisme f est diagonalisable ;
- le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbf{K}$ et les ordres de chacune de ses racines coïncident avec les dimensions des sous-espaces propres associés ;
- il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \operatorname{Sp}(f)$ telle que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E).$$

18. Théorème *(Cayley-Hamilton)*. Le polynôme minimal π_f divise le polynôme caractéristique χ_f. En particulier, on a $\chi_f(f) = 0$.

19. Théorème *(lemme des noyaux)*. Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbf{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. En notant $P \coloneqq P_1 \cdots P_r$, on a

$$\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} P_r(f).$$

20. Théorème. Les points suivants sont équivalents :

- l'endomorphisme f est diagonalisable ;
- il admet un polynôme annulateur scindé simple sur $\mathbf{K}$;
- le polynôme π_f est scindé simple sur $\mathbf{K}$.

21. Corollaire. On suppose que l'endomorphisme f est diagonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. Alors l'endomorphisme induit $f|_F \in \mathscr{L}(F)$ est diagonalisable.

22. Lemme. Un endomorphisme f d'un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par le polynôme $X^q - X \in \mathbf{F}_q[X]$.

23. Théorème. Le nombre de matrices inversibles et diagonalisables de taille n et à coefficients dans le corps fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments vaut [2] D1

$$\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_{q-1}) \in \mathbf{N}^{q-1} \\ n_1 + \dots + n_{q-1} = n}} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)|}{|\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbf{F}_q)| \cdots |\mathrm{GL}_{n_{q-1}}(\mathbf{F}_q)|}$$

où

$$|\mathrm{GL}_k(\mathbf{F}_q)| = (q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}), \qquad k \geqslant 1.$$

2. Familles d'endomorphismes diagonalisable

2.1. Codiagonalisation

24. Définition. Une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{L}(E)$ d'endomorphismes est *codiagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle les matrices de chaque endomorphisme $f \in \mathscr{F}$ sont [3]

diagonales.

25. Théorème. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables et commutant entre eux. Alors la famille $\{f, g\}$ est codiagonalisable.

26. Corollaire. Une famille de $\mathscr{L}(E)$ est codiagonalisable si et seulement si ses éléments sont diagonalisables et commutent entre eux.

2.2. Les endomorphismes normaux

[3] 27. Définition. L'endomorphisme f est normal s'il commute avec son adjoint f^*.

28. Théorème. Soit E un espace hermitien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors les points suivants sont équivalents :

- l'endomorphisme f est normal ;
- il se diagonalise dans une base orthonormée de E ;
- lui et son adjoint sont codiagonalisables.

29. Lemme. Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Alors dans toute base orthonormée de E, la matrice de l'endomorphisme f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbf{R},\ b \neq 0.$$

30. Théorème. Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_s & -b_s \\ & & & & & & b_s & a_s \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_j, b_j \in \mathbf{R}$$

où les réels λ_j sont les valeurs propres réelles de l'endomorphisme f.

31. Corollaire. Toute matrice symétrique réelle (ou hermitienne complexe) est diagonalisable dans une base orthonormée.

[4] 32. Contre-exemple. Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable : il suffit de considérer la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}).$$

[3] 33. Corollaire. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive. Alors il existe une unique matrice $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = M^2$. Le même résultat est établit pour des matrices hermitiennes positives.

34. Application *(décomposition polaire)*. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \\ (Q, S) & \longmapsto & QS \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

3. Décomposition de Dunford et résultats topologiques

3.1. Décomposition de Dunford et applications

35. Théorème. On suppose que le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbf{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que [3] D2

- on ait $f = d + n$;
- les endomorphismes d et n commutent et sont respectivement diagonalisable et nilpotent.

36. Remarque. On peut montrer que les endomorphismes d et n appartiennent à l'algèbre $\mathbf{K}[f]$. De plus, dès que le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, un algorithme permet de les calculer sans avoir besoin de connaître les valeurs propres de l'endomorphisme f.

37. Application. Une fois la décomposition de Dunford obtenu, le calcul de l'endomorphisme $\exp f$ est très facile puisque $\exp f = (\exp n) \circ (\exp d)$. Il en va de même pour le calcul des puissances de l'endomorphisme f.

38. Exemple. Attention, la décomposition de Dunford de la matrice [4]

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mais $A = A + 0$.

39. Application. On suppose que le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbf{K}$. Alors l'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si son exponentiel $\exp f$ l'est.

3.2. Résultats topologiques

40. Notation. On considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes. On note [1]

- $\mathscr{D}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$;
- $\mathscr{T}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

41. Proposition. La partie $\mathscr{D}_n(\mathbf{K})$ est dans l'espace $\mathscr{T}_n(\mathbf{K})$.

42. Corollaire. La partie $\mathscr{D}_n(\mathbf{C})$ est dans l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

43. Application. La fonction $\mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ qui à une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ associe la partie diagonalisable dans sa décomposition de Dunford n'est pas continue dès que $n \geqslant 2$.

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Algebre 1.* Cassini, 2001.
[3] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.
[4] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* 4e édition. Cépadués, 2011.