# **Leçon 156.** Exponentielle de matrices. Applications.

1. Notation. Dans toute cette leçon, on considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes ainsi qu'un entier $n \geqslant 1$. Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.

## 1. L'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme

### 1.1. L'exponentielle comme une somme de série

2. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. Alors la série $\sum \frac{1}{n!}A^n$ converge absolument et donc elle converge.

3. Définition. L'*exponentielle* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice
$$\exp A \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}).$$
L'exponentiel d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est l'endomorphisme
$$\exp u \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!} \in \mathscr{L}(E).$$

4. Remarque. En fixant une base $\mathscr{B}$ de $E$, on a $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\exp u) = \exp(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u))$.

5. Remarque. Lorsque $n = 1$, en faisant l'identification $\mathscr{M}_1(\mathbf{K}) \simeq \mathbf{K}$, on retrouve la fonction exponentielle de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$ que l'on connaît bien.

6. Exemple. Pour des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, on peut écrire
$$\exp(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$
Pour un réel $\theta \in \mathbf{R}$, on a
$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}.$$

7. Remarque. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice $\exp A$ appartient à l'algèbre $\mathbf{K}[A]$.

8. Proposition. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ trois matrices. Alors
   - $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$ et ${}^{\mathrm{t}}\exp A = \exp {}^{\mathrm{t}}A$,
   - si $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp A \exp B$,
   - la matrice $\exp A$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.

9. Contre-exemple. Le second point est faux si les deux matrices ne commutent pas : il suffit de prendre les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Proposition. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. Alors
   - $\det(\exp A) = e^{\operatorname{Tr} A}$ ;
   - les valeurs propres de la matrice $\exp A$ sont les scalaires $e^{\lambda}$ avec $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$.

11. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. Alors
$$\left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k \longrightarrow \exp A.$$

### 1.2. Des moyens de calculs

12. Proposition. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente d'indice $k \geqslant 1$. Alors
$$\exp N = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{N^n}{n!}.$$

13. Exemple. Cela donne
$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Proposition. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ un scalaire. Alors
$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & 1 & 1 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Théorème *(décomposition de Dunford)*. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple $(D, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$ de matrices telles que
   - la matrice $D$ soit diagonalisable ;
   - la matrice $N$ est nilpotente ;
   - $DN = ND$ et $A = D + N$.

16. Remarque. La décomposition de Dunford de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
s'écrit $A = A + 0$.

17. Remarque. Une fois la décomposition $A = D + N$ obtenu, il est très facile de calculer la matrice $\exp A = \exp D \exp N$.

18. Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Notons $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors celle de la matrice $\exp A$ s'écrit
$$\exp A = \exp D + \exp D(\exp N - I_n).$$

19. Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors elle est diagonalisable si et seulement si son exponentielle $\exp A$ l'est.

## 2. Aspect analytique de la fonction exponentielle

### 2.1. Sa régularité

20. Théorème. La fonction $\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est continue.

21. Théorème. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et sa différen-

tielle s'écrit

$$\mathrm{dexp}(M)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k-1} M^i H M^j, \qquad M, H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}).$$

22. Exemple. Pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$\mathrm{dexp}(0)(H) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dexp}(I_n)(H) = eH$$

23. Application. Par le théorème d'inversion locale, on peut trouver un voisinage $U \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de la matrice nulle (respectivement $I_n$) et un voisinage $V \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de la matrice $I_n$ (respectivement $eI_n$) tels que la restriction $\exp\colon U \longrightarrow V$ soit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

24. Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice. Alors la fonction $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par l'égalité

$$\varphi(t) = \exp(tA), \qquad t \in \mathbf{R}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée s'écrit

$$\varphi'(t) = A \exp(tA), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

25. Remarque. Pour une fonction dérivable $A\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'égalité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\exp A(t)] = A'(t) \exp A(t)$$

n'est pas toujours vérifiée : il suffit de considérer la fonction

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. Proposition. Soit $A\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui commute avec sa dérivée. Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\exp A(t)] = A'(t) \exp A(t), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

### 2.2. Applications aux systèmes différentielles linéaires

27. Hypothèse. On considère un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice et $B\colon I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une fonction continue. On souhaite étudier le système différentiel

$$y' = Ay + B \tag{E}$$

ainsi que le système différentiel homogène associé

$$y' = Ay. \tag{H}$$

28. Théorème *(Cauchy-Lipschitz linéaire)*. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}^n$ un couple. Alors le système (H) associé à la condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution définie sur tout l'intervalle $I$.

29. Proposition. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}^n$ un couple. Alors l'unique solution du problème de Cauchy précédent s'écrit sous la forme

$$y(t) = \exp([t - t_0]A) y_0, \qquad t \in I.$$

30. Exemple. Lorsque la matrice $A$ est diagonalisable, en considérant ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, la solution s'écrit

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} y_0^1 \\ \vdots \\ e^{(t-t_0)\lambda_n} y_0^n \end{pmatrix}, \qquad t \in I$$

où l'on a noté $y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n)$.

31. Application. Soient $a, b \in \mathbf{C}$ deux scalaires. On considère le polynôme

$$P \coloneqq X^2 + aX + b \in \mathbf{C}[X]$$

et l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0.$$

- Si le polynômes $P$ admet deux racines distinctes $\lambda$ et $\mu$, alors les solutions sont de la forme $y(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$ pour $t \in \mathbf{R}$ avec $A, B \in \mathbf{C}$.
- Si le polynômes $P$ admet une racine double $\lambda$, alors les solutions sont de la forme $y(t) = (At + B)e^{\lambda t}$ pour $t \in \mathbf{R}$ avec $A, B \in \mathbf{C}$.

32. Théorème *(méthode de variation de la constante)*. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}^n$ un couple. Alors l'unique solution du système (E) associé à la condition initiale $y(t_0) = y_0$ s'écrit sous la forme

$$y(t) = \exp([t - t_0]A) y_0 + \int_{t_0}^t \exp([t - s]A) B(s) \, \mathrm{d}s, \qquad t \in I.$$

33. Exemple. La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t, \\ y(-1) = 0, \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$$

s'écrit

$$y(t) = (t^2/2 + t(e+1) + e + 1/2)e^t, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

## 3. Des questions d'injectivité et de surjectivité

### 3.1. Injectivité et image de l'exponentielle complexe ou réelle

34. Proposition. Lorsque $n \geqslant 2$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, la fonction $\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ n'est pas injective.

35. Exemple. Avec l'exemple 6, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, on trouve

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 2k\pi \\ -2k\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp 0.$$

36. Proposition. La fonction $\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ n'est pas surjective.

37. Exemple. Avec $M \coloneqq \mathrm{diag}(1, -1)$, comme $\det M = -1 < 0$, la matrice $M$ ne peut pas être une exponentielle.

38. Lemme. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice à coefficients complexes. Alors le groupe topologique $\mathbf{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbf{C}[A]$.

39. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice à coefficients complexes. Alors l'exponentielle matricielle complexe induit une surjection

$$\exp\colon \mathbf{C}[A] \longrightarrow \mathbf{C}[A]^\times.$$

- D1 -

40. THÉORÈME. L'exponentielle matricielle complexe réalise une surjection
$$\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$
41. COROLLAIRE. L'image de l'exponentielle matricielle réelle est l'ensemble
$$\exp \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^{\times 2} \coloneqq \{A^2 \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\}.$$

### 3.2. Restriction à des espaces particuliers : la question du logarithme

42. NOTATION. On note $\mathrm{N}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ les ensembles des matrices nilpotentes et unipotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
43. DÉFINITION. Le *logarithme* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $\rho(A) < 1$ est la matrice
$$\log(I_n + A) \coloneqq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k.$$
44. LEMME. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $\rho(A) < 1$, on a
$$\exp(\log(I_n + A)) = I_n + A.$$
45. LEMME. Pour toute matrice $A \in \mathrm{N}_n(\mathbf{C})$, on a $\exp A \in \mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ et
$$\log(\exp(tA)) = tA, \qquad t \in \mathbf{R}.$$
46. THÉORÈME. L'exponentielle matricielle complexe induit une bijection
$$\exp\colon \mathrm{N}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{U}_n(\mathbf{C})$$
d'inverse
$$\log\colon \mathrm{U}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{N}_n(\mathbf{C})$$
47. THÉORÈME. L'exponentielle matricielle réelle induit un homéomorphisme
$$\exp\colon \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$$
et l'exponentielle matricielle complexe induit un homéomorphisme
$$\exp\colon \mathscr{H}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathscr{H}_n^{++}(\mathbf{C}).$$
48. NOTATION. Soient $p, q \geqslant 1$ deux entiers. L'ensemble $\mathrm{O}(p,q)$ désigne le groupe orthogonal de la forme quadratique
$$(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$
définie sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{p+q}$.

- D2 -

49. THÉORÈME. Il existe un homéomorphisme
$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}.$$


[1] Florent BERTHELIN. *Équations différentielles.* Cassini, 2017.
[2] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.
[3] Xavier GOURDON. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.
[4] Xavier GOURDON. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[5] Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e édition. De Boeck Supérieur, 2021.