Leçon 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

1. Notation. Soient $\mathbf{K}$ un corps et $n \geqslant 1$ un entier. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Endomorphismes trigonalisables

1.1. Premières caractérisation de la trigonalisabilité

2. Définition. L'endomorphisme u est *trigonalisable* s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle sa matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

3. Remarque. L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est trigonalisable.

4. Théorème. Les points suivants sont équivalents :
   - l'endomorphisme u est trigonalisable ;
   - il admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbf{K}$;
   - son polynôme minimal π_u est scindé sur $\mathbf{K}$;
   - son polynôme minimal χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$.

5. Exemple. La matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$$
est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique vaut $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

6. Corollaire. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par l'endomorphisme u supposé trigonalisable. Alors l'endomorphisme induit $u|_F$ est aussi trigonalisable.

7. Corollaire. Lorsque le corps $\mathbf{K}$ est algébriquement clos comme $\mathbf{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.

8. Proposition. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme. Alors
$$\operatorname{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(u)\}.$$

1.2. Trigonalisation simultanée

9. Lemme. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Alors le noyau $\operatorname{Ker} u$ et l'image $\operatorname{Im} u$ sont stables par l'endomorphisme u.

10. Exemple. Pour un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, on retrouve que le noyau $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par l'endomorphisme u et, en particulier, c'est le cas pour les sous-espaces propres et caractéristiques de ce dernier.

11. Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables (respectivement trigonalisables) commutant deux à deux. Alors il existe une base de E dans laquelle les matrices des endomorphismes u_i avec $i \in I$ sont toutes diagonales (respectivement triangulaires supérieures).

12. Contre-exemple. La condition de commutativité est nécessaire : les matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
sont diagonalisables, mais elles ne sont pas co-diagonalisable.

13. Corollaire. La somme ou la composée de deux endomorphismes trigonalisables qui commutent est encore trigonalisable.

1.3. Propriétés topologiques

14. Hypothèse. On se place sur le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes.

15. Proposition. L'ensemble C des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes est dense dans l'ensemble T des matrices trigonalisables.

16. Corollaire. L'ensemble C est un ouvert de T. En particulier, l'ensemble D des matrices diagonalisables est dense dans T.

17. Corollaire. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, alors les ensembles C et D sont denses dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

18. Théorème. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, alors l'ensemble T est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2. Endomorphismes nilpotents

2.1. Premières caractérisation de la nilpotence

19. Définition. L'endomorphisme u est *nilpotent* s'il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ qui vérifie $u^k = 0$. Dans ce cas, l'entier $\inf\{k \in \mathbf{N} \mid u^k = 0\}$ est son *indice de nilpotence*. On définit également la notion pour des matrices.

20. Remarque. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est nilpotente.

21. Exemple. La matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$
est nilpotent d'indice $n-1$.

22. Théorème. Les points suivants sont équivalents :
   - l'endomorphisme u est nilpotent ;
   - $\chi_u = X^n$;
   - il existe un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $\pi_u = X^p$;
   - l'endomorphisme u est trigonalisable et son spectre est réduit au singleton $\{0\}$.

23. Corollaire. Un endomorphisme nilpotent est trigonalisable.

24. Théorème. On suppose que le corps $\mathbf{K}$ est de caractérisation nulle. Alors les points suivants sont équivalents :
   - l'endomorphisme u est nilpotent ;
   - pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\operatorname{tr} u^k = 0$;
   - l'endomorphisme nulle appartient l'adhérence de la classe de conjugaison de u.

25. Proposition. On suppose que l'endomorphisme u est nilpotent d'indice p. Alors
$$\exp u = \sum_{n=0}^{p} \frac{u^k}{k!}.$$

2.2. Structure du cône nilpotent

26. Définition. Le *cône nilpotent* est l'ensemble $\mathscr{N}(E)$ des endomorphismes nilpotents de E. On définit aussi l'ensemble $\mathscr{N}_n(\mathbf{K})$ des matrices nilpotentes.
27. Remarque. L'ensemble $\mathscr{N}_n(\mathbf{K})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ puisqu'il n'est pas stable par somme. En effet, on a
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathscr{N}_2(\mathbf{K}).$$
28. Proposition. L'ensemble $\mathscr{N}(E)$ est un cône, c'est-à-dire
$$\forall u \in \mathscr{N}(E),\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \qquad \lambda u \in \mathscr{N}(E).$$
29. Proposition. La somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent est aussi nilpotent.
30. Proposition. On a $\operatorname{Vect} \mathscr{N}(E) = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.
31. Lemme. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent et $e \in E \setminus \{0\}$ un vecteur non nul. Soit $r \in \mathbf{N}^*$ le plus grand entier tels la famille $(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e))$ soit libre. Alors $u^r(e) = 0$.
D1
32. Théorème. Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini à q éléments. Alors
$$|\mathscr{N}_n(\mathbf{F}_q)| = q^{n(n-1)}.$$

2.3. Liens avec les noyaux itérés

33. Proposition. Les espaces $\operatorname{Ker}^i u$ avec $i \in \mathbf{N}$ sont stables par l'endomorphisme u. De plus, la suite $(\operatorname{Ker} u^i)_{i \in \mathbf{N}}$ est stationnaire et, pour tout entier $i \in \mathbf{N}$, on a
$$\dim \operatorname{Ker} u^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} u^i \geqslant \dim \operatorname{Ker} u^{i+2} - \dim \operatorname{Ker} u^{i+1} \geqslant 0.$$
34. Proposition. On suppose que l'endomorphisme u est nilpotent. Alors ses seuls espaces stables sont les noyaux $\operatorname{Ker} u^i$ avec $i \in \mathbf{N}$.

3. Application à la réduction

3.1. La décomposition de Dunford

35. Théorème *(Dunford)*. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que
   - $u = d + n$;
   - les endomorphismes d et n commutent ;
   - ils sont respectivement diagonalisable et nilpotent.

De plus, les endomorphismes d et n appartiennent à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. L'écriture $u = d + n$ est la *décomposition de Dunford* de l'endomorphisme u.
36. Exemple. Attention, la décomposition de Dunford de la matrice
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
n'est pas
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
mais $A = A + 0$.
37. Application. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable si et seulement si son exponentielle $\exp A$ l'est.
38. Théorème. On suppose que le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle et que le polynôme χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$. On considère le polynôme
$$P \coloneqq \frac{\chi_u}{\operatorname{pgcd}(\chi_u, \chi_u')}$$
et la suite $(u_r)_{r \in \mathbf{N}}$ d'endomorphismes vérifiant
$$u_0 = u,$$
$$u_{r+1} = u_r - P(u_r)P'(u_r)^{-1}, \qquad r \geqslant 1.$$
Notons $u = d + n$ la décomposition de Dunford de l'endomorphisme u. Alors la suite $(u_r)_{r \in \mathbf{N}}$ est bien définie, elle est stationnaire et elle converge vers l'endomorphisme d au bout d'au plus $\log_2 n$ itérations. D2

3.2. Les endomorphismes cycliques

39. Définition. L'endomorphisme u est *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
40. Proposition. On note $C_P \in \mathscr{M}_d(\mathbf{K})$ la matrice compagnon d'un polynôme unitaire $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré d. Alors $\chi_{C_P} = P$.
41. Lemme. Pour $x \in E$, on considère l'unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbf{K}[X]$ engendrant l'idéal
$$\{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\} \subset \mathbf{K}[X].$$
Alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.
42. Proposition. Les points suivants sont équivalents :
   - l'endomorphisme u est cyclique ;
   - $\pi_u = \chi_u$;
   - il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon.

43. Théorème *(réduction de Frobenius)*. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe un unique entier $r \geqslant 1$, des uniques polynômes unitaires non constants $P_1, \dots, P_r \in \mathbf{K}[X]$ et des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r \subset E$ stables par l'endomorphisme u tels que
   - $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
   - $P_r \mid \cdots \mid P_1$;
   - pour tout entier $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme $u|_{E_i}$ induit sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique de polynôme minimal P_i.

La suite $(P_1, \dots P_r)$ sont les *invariants de similitude* de l'endomorphisme u.

3.3. La réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

44. Définition. Un *bloc de Jordan* est la matrice
$$J_n \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{N}_n(\mathbf{K}).$$
45. Proposition. Les points suivants sont équivalents :

– il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = J_n$;
– l'endomorphisme u est nilpotent et cyclique ;
– l'endomorphisme u est nilpotent d'indice n ;
– l'endomorphisme u est nilpotent de rang $n-1$.

46. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors il existe des entiers $n_1, \dots, n_p \in \mathbf{N}^*$ avec $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_p$ et une base $\mathscr{B}$ de E tels que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(J_{n_1}, \dots, J_{n_p}).$$
De plus, ces entiers n_i sont uniques.

47. Exemple. Les matrices nilpotentes
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ne sont pas semblables.

48. Corollaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. On reprend les notations du théorème précédent. Alors l'indice de nilpotence de l'endomorphisme u est égal à l'entier n_1.

49. Remarque. Dans le cas d'un endomorphisme nilpotent, ses réduites de Jordan et de Frobenius sont égales : ses invariantes de similitudes sont les polynômes X^{n_j}.