Leçon 158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

1. Notation. Dans cette leçon, on considère un entier $n \geqslant 1$ et le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes.

1. Matrices et endomorphismes symétriques

1.1. Matrices symétriques, antisymétrique et hermitiennes

2. Définition. La *transposée* d'une matrice $M := (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice ${}^{\mathrm{t}}M := (m_{j,i})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et sa *transconjuguée* la matrice $M^* := {}^{\mathrm{t}}\overline{M}$.

3. Définition. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est *symétrique* si ${}^{\mathrm{t}}M = M$. Elle est *antisymétrique* si ${}^{\mathrm{t}}M = -M$. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est *hermitienne* si $M^* = M$. On notera respectivement $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{H}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices symétriques, antisymétrique et hermitienne.

4. Exemple. La matrice réelle
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
est symétrique.

5. Définition. Soit E un espace euclidien ou hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *autoadjoint* si
$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(x) \rangle.$$
Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on dira que l'endomorphisme u est symétrique.

6. Proposition. Soit E un espace euclidien. Alors un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle sa matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.

7. Proposition. L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $n(n+1)/2$. De plus, on peut écrire la décomposition $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

8. Remarque. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ se décompose sous la forme
$$M = \frac{M + {}^{\mathrm{t}}M}{2} + \frac{M - {}^{\mathrm{t}}M}{2} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R}).$$

9. Proposition. Dans le cas complexe, on a $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus i\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

10. Définition. Une matrice symétrique $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est *positive* (respectivement *définie positive*) si
$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad \langle Mx, x \rangle \geqslant 0 \qquad (\text{respectivement} > 0 \text{ avec } x \neq 0).$$
où la notation $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$. On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives et définies positives. Ce sont des sous-espaces vectoriels.

11. Proposition. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors elle est définie positive si et seulement si la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}xMy$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

1.2. Lien avec les formes quadratiques

12. Définition. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Une *forme quadratique* sur E est une application $q \colon E \longrightarrow \mathbf{K}$ de la forme
$$\forall x \in E, \qquad q(x) = b(x, x)$$
pour une forme bilinéaire symétrique b sur E.

13. Définition. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La matrice dans $\mathscr{B}$ d'une forme quadratique q sur E est la matrice
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) := (b(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
où l'application b est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q.

14. Proposition. On reprend les mêmes notations. Alors la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ est symétrique (ou hermitienne). Réciproquement, soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors l'application $x \longmapsto {}^{\mathrm{t}}xMx$ est une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$.

15. Exemple. La matrice de la forme quadratique $x^2 + 2xy - y^2$ sur $\mathbf{R}^2$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbf{R}).$$

16. Définition. Deux matrices $M, M' \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ sont *congruentes* si elles représentent la même forme quadratique dans une base différente, c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $M' = {}^{\mathrm{t}}\overline{P}MP$.

2. La réduction des matrices symétriques réelles et conséquences

2.1. Le théorème spectral et la réduction des endomorphismes normaux

17. Théorème *(spectral)*. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice symétrique ou hermitienne. Alors il existe une base orthonormée de $\mathbf{K}^n$ formées de vecteurs propres de la matrice M. De plus, ses valeurs propres sont réelles.

18. Contre-exemple. Le théorème ne fonctionne pas pour des matrices complexes symétriques : la matrice symétrique
$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

19. Corollaire. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice symétrique (respectivement hermitienne). Alors il existe une matrice orthogonal $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ (respectivement unitaire $P \in \mathrm{U}_n(\mathbf{C})$) telle que la matrice P^*MP soit diagonale réelle.

20. Corollaire. Une matrice symétrique est positive (respectivement définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

21. Corollaire. Soit q une forme quadratique sur un espace euclidien ou hermitien E. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de la forme q est diagonale réelle.

22. Remarque. On se passer du théorème spectral pour ce montrer ce dernier corollaire, on utilise la méthode de réduction de Gauss à la place.

23. Corollaire. Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices symétrique ou hermitienne telles que la matrice M soit définie positive. Alors il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$P^* M P = I_n \qquad \text{et} \qquad P^* N P = D$$

où la matrice D est diagonale réelle.

D1

24. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal d'un espace euclidien E. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme u est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, \tau_1, \dots, \tau_s)$$

où l'on a noté

$$\tau_i \coloneqq \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \qquad i \in [\![1, s]\!].$$

2.2. La réduction des formes quadratiques réelles

25. Définition. Soit (E, q) un espace quadratique. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est *q-orthonormée* si

$$\forall i \neq j, \qquad q(e_i, e_j) = \delta_{i,j}.$$

26. Exemple. La base canonique, formée des matrices élémentaires, de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est orthogonale pour la forme $A \longmapsto \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}\!AA)$.

27. Théorème. Tout espace quadratique de dimension finie possède une base orthogonale.

28. Proposition. Soit (E, q) un espace quadratique réel de dimension n. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E et deux entiers $r, s \in \mathbf{N}$ avec $r + s \leqslant n$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \mathrm{diag}(I_r, -I_s, 0).$$

29. Définition. De tels entiers r et s sont uniques. Le couple (r, s) est la *signature* de la forme.

30. Exemple. Sur $\mathbf{R}^3$, la forme quadratique

$$x^2 + 2y^2 + 15z^2 - 4xy + 6xz - 8yz = (x - 2z + 3z)^2 - 2(y - z)^2 + 8z^3$$

est de signature $(2, 1)$.

31. Corollaire. Deux formes quadratiques réelles de même dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

32. Corollaire. Deux matrices symétriques $M, N \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ sont congruentes si et seulement si elles ont la même signature, c'est-à-dire les formes bilinéaires $x \longmapsto x\,{}^{\mathrm{t}}Mx$ et $x \longmapsto x\,{}^{\mathrm{t}}Nx$ ont la même signature.

3. Les matrices symétriques en analyse

3.1. La matrice hessienne et son utilisation en optimisation

33. Rappel. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, F un espace vectoriel normé et $f \colon \Omega \longrightarrow F$ une application deux fois différentiable en un point a. Sa différentielle seconde $d^2 f(a)$ au point a peut être vue comme une forme bilinéaire associée, dans la base canonique, à la matrice

$$\mathrm{H}f(a) \coloneqq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),$$

appelée la *matrice hessienne* de l'application f au point a.

34. Théorème *(Schwartz)*. Avec les mêmes notations, la forme $d^2 f(a)$ est symétrique et la matrice $\mathrm{H}f(a)$ est symétrique.

35. Proposition. Soient $f \colon \Omega \longrightarrow F$ une application deux fois différentiable en un certain point $x^\star \in \Omega$.

- Si le point $x^\star$ en est un minimum local de la fonction f, alors $df(x^\star) = 0$ et sa hesienne $\mathrm{H}f(x^\star)$ est positive.
- Si $df(x^\star) = 0$ et sa hessienne $\mathrm{H}f(x^\star)$ est définie positive, alors le point $x^\star$ est un minimum local strict de la fonction f.

36. Contre-exemple. Les réciproques des deux points sont fausses. Pour le premier point, la fonction $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 - y^2$ admet un unique point critique qui est l'origine et, en ce point, sa hessienne est positive, mais l'origine n'est pas un minimum local. On considère le contre-exemple $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$ pour le second point.

37. Théorème *(lemme de Morse)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que

- l'origine est un point critique, c'est-à-dire $df(0) = 0$;
- la forme quadratique $d^2 f(0)$ n'est pas dégénérée ;
- elle est de signature $(p, n - p)$.

Alors il existe des voisinages $U, V \subset \mathbf{R}^n$ de l'origine et un difféomorphisme $\varphi \colon U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant D2

- $\varphi(0) = 0$;
- pour tout point $x \in U$, on a
$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$$
où les réels $\varphi_i(x)$ sont les coordonnées du vecteurs $\varphi(x)$.

3.2. Résultats de décomposition matricielle et valeurs propres

38. Théorème *(décomposition LU)*. Soit $A \coloneqq (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que ses sous-matrices $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ avec $k \leqslant n$ soient inversibles. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure L de diagonale 1 et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. De plus, cette factorisation est unique.

39. Corollaire *(Cholesky)*. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique définie positive si et seulement s'il existe une matrice triangulaire supérieure $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}BB$. Dans ce cas, la matrice B est unique lorsqu'on impose que ses coefficients diagonaux soient positifs.

40. Remarque. Une fois la décomposition $A = {}^{\mathrm{t}}BB$ obtenue, il est facile de résoudre un système linéaire $Ax = b$.

41. Théorème. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Alors il existe une unique matrice $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$.

42. Théorème *(de décomposition polaire)*. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible. Alors il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$. Plus

précisément, l'application

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}\right.$$

est un homéomorphisme. De même, l'application

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathrm{U}_n(\mathbf{C}) \times \mathscr{H}_n^{++}(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \\ (U, H) & \longmapsto & UH \end{array}\right.$$

est un homéomorphisme avec

$$\mathscr{H}_n^{++}(\mathbf{C}) \coloneqq \{M \in \mathscr{H}_n(\mathbf{C}) \mid \forall x \neq 0,\ \langle Mx, x\rangle > 0\}.$$

43. Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice réelle. Alors il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.

44. Corollaire. Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on a

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^{\mathrm{t}}AA)}$$

où la notation $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.

45. Corollaire. Tout sous-groupe compact du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est égal à ce dernier.

46. Définition. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{C}^n$. Le *quotient de Rayleigh* associée à une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est l'application

$$R_A \colon \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{C}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ x & \longmapsto & \langle Ax, x\rangle / \langle x, x\rangle. \end{array}\right.$$

47. Théorème. Soient $A \in \mathscr{H}_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbf{C}^n$ composée de vecteurs propres e_i de la matrice A associé aux valeurs propres $\lambda_i \in \mathbf{C}$ avec $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$. Alors pour tout indice $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sup\{R_A(x) \mid x \in \mathrm{Vect}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}^{\perp} \setminus \{0\}\} \\ &= \inf\{R_A(x) \mid x \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}^{\perp} \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. 2e édition. H&K, 2005.
[2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.
[3] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. 3e tirage. Masson, 1982.
[4] Xavier Gourdon. *Algèbre*. 2e édition. Ellipses, 2009.
[5] Jean-Étienne Rombaldi. *Analyse matricielle*. 2e édition. EDP Sciences, 2019.