Leçon 159. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

1. Notation. On considère un corps k et un k-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbf{N}$.

1. Espace dual et bidual

1.1. Les formes linéaires et l'espace dual

2. Définition. Une *forme linéaire* sur l'espace E est une application linéaire $E \longrightarrow k$. L'*espace dual* de E est l'ensemble des formes linéaires sur E, noté $E^* := \mathscr{L}(E, k)$. Il s'agit d'un k-espace vectoriel.
3. Notation. Pour une forme $\varphi \in E^*$ et un vecteur $x \in E$, on notera $\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x)$.
4. Exemple. Pour $\alpha \in k$, l'application d'évaluation $\mathrm{ev}_\alpha \colon P \longmapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur l'espace $k[X]_{<n}$.
5. Exemple. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable en un point $a \in \Omega$. Alors la différentielle $df(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$.
6. Définition. La *base duale* d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* définie par les égalités
$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}, \qquad i, j \in [\![1, n]\!].$$
7. Proposition. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.
8. Exemple. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de k^n. Pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$ et tout vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$, on a $\varepsilon_i^*(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
9. Corollaire. Les espaces E et E^* sont de même dimension et donc isomorphes.
10. Remarque. Dans le cas de la dimension infinie, une base duale est libre, mais elle n'est pas génératrice.
11. Exemple. Toute forme linéaire $f \in \mathscr{M}_n(K)^*$ est de la forme
$$f(M) = \mathrm{tr}(AM), \qquad M \in \mathscr{M}_n(K)$$
pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1.2. L'espace bidual et les bases anté-duales

12. Définition. L'*espace bidual* de E est l'espace dual de E^*, noté E^{**}.
13. Théorème. L'application
$$\Phi \colon \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^{**}, \\ x \longmapsto [\varphi \longmapsto \varphi(x)] \end{array} \right.$$
est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.
14. Remarque. Cette isomorphisme entre un espace et son bidual est canonique. En dimension infinie, il est injective, mais elle n'est pas surjective.
15. Proposition. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que
$$e_i^* = \varphi_i, \qquad i \in [\![1, n]\!].$$
De plus, on a $e_i = \Phi^{-1}(\varphi_i^*)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
16. Définition. Une telle base $(e_1, \dots, e_n)$ est la *base anté-duale* de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
17. Application. Soient $x_1, \dots, x_n \in k$ des éléments deux à deux distincts. Dans l'espace $k[X]_{<n}$, on considère la base anté-duale $(L_1, \dots, L_n)$ de la base $(\mathrm{ev}_{x_1}, \dots, \mathrm{ev}_{x_n})$. Les polynômes
$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in k[X]$$
sont les polynômes de Lagrange associés aux points x_j.

1.3. Continuité, forme linéaire et une application

18. Théorème *(Hahn-Banach, forme analytique)*. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $p \colon E \longrightarrow \mathbf{R}$ une semi-norme. Soient $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g \in G^*$ une forme linéaire vérifiant
$$\forall x \in G, \qquad g(x) \leqslant p(x).$$
Alors il existe une forme linéaire $f \in E^*$ prolongeant la forme linéaire g telle que
$$\forall x \in E, \qquad f(x) \leqslant p(x).$$
19. Corollaire. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $C \subset E$ un convexe ouvert non vide avec $C \neq E$. Soit $x_0 \in E \setminus C$ un point. Alors il existe une forme linéaire continue $f \in E^*$ telle que
$$\forall x \in C, \qquad f(x) < f(x_0).$$
20. Application. Munissons l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\| \ \|_2$. Alors l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(n)$ est la boule unité fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2. Orthogonalité et hyperplan

2.1. L'orthogonal d'une partie

21. Définition. L'*orthogonal* d'une partie $A \subset E$ est le sous-espace vectoriel
$$A^\perp := \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}.$$
L'*orthogonal* d'une partie $B \subset E^*$ est le sous-espace vectoriel
$$B^\circ := \{x \in E \mid \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}.$$
22. Exemple. Pour une forme $\varphi \in E^*$, on a $\{\varphi\}^* = \operatorname{Ker} \varphi$. On a $E^\perp = \{0\}$.
23. Proposition. Soient $A, B \subset E$ et $U, V \subset E^*$ quatre parties. Alors
   - si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$;
   - si $U \subset V$, alors $V^\circ \subset U^\circ$;
   - $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$ et $U^\circ = (\operatorname{Vect} U)^\circ$.
24. Proposition. On rappel que l'espace E est de dimension finie. Soient $F \subset E$ et $G \subset E^*$ des sous-espace vectoriel. Alors
   - $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $(F^\perp)^\circ = F$;
   - $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $(G^\circ)^\perp = G$;
25. Contre-exemple. L'égalité $(G^\circ)^\perp = G$ est fausse en dimension infinie : on peut considérer l'ensemble $\{P \longmapsto P^{(n)}(0)\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}[X]^*$
26. Proposition. On rappel que l'espace E est de dimension finie. Soient $A, B \subset E$

et $U, V \subset E^*$ quatre parties. Alors
- $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$;
- $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$;
- $(U+V)^\circ = U^\circ \cap V^\circ$;
- $(U \cap V)^\circ = U^\circ + V^\circ$;

2.2. L'application transposée d'une application linéaire

27. Définition. Soient E et F deux k-espaces vectoriels. La *transposée* d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est l'application linéaire

$$^{t}u \colon \left| \begin{array}{l} F^* \longrightarrow E^*, \\ f \longmapsto f \circ u. \end{array} \right.$$

28. Proposition. Soient E et F deux k-espaces vectoriels de dimension finie. Alors
- $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} {}^{t}u$ et $\operatorname{Im} {}^{t}u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$;
- $\operatorname{Ker} {}^{t}u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

29. Proposition. Soient E, F et G trois k-espaces vectoriels. Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors
- ${}^{t}(v \circ u) = {}^{t}u \circ {}^{t}v$;
- ${}^{t}\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$;
- si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors ${}^{t}(u^{-1}) = ({}^{t}u)^{-1}$.

30. Proposition. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par l'endomorphisme u si et seulement si son orthogonal $F^\perp$ est stable par la transposée ${}^{t}u$.

31. Proposition. Soient E et F deux k-espaces vectoriels de dimensions m et n. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E et F. On considère les bases duales associées $\mathscr{B}^*$ et $\mathscr{C}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}^*, \mathscr{B}^*}({}^{t}u) = {}^{t}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{C}}(u).$$

2.3. Lien avec les hyperplans

32. Proposition. On rappel que l'espace E est de dimension n.
- Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ des formes linéaires formant une famille de rang $r \in [\![0, n]\!]$. Alors le sous-espace vectoriel $\{x \in E \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_p(x) = 0\}$ est de dimension $n - r$.
- Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension $q \in [\![0, n]\!]$. Alors il existe des formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q} \in E^*$ telles que
$$F = \{x \in E \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-q}(x) = 0\}.$$

33. Proposition. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors il s'agit d'un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ telle que $F = \operatorname{Ker} \varphi$.

34. Corollaire. Soit $H \subset E$ un hyperplan. Alors l'orthogonal $H^\perp$ est une droite.

35. Remarque. Plus généralement, si un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est de codimension finie r, alors son orthogonal $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension r.

3. Utilisation de la dualité

3.1. Le théorème des extrema liés

36. Lemme. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$ des formes linéaires indépendantes et $f \in E^*$ une forme linéaire. Alors

$$f \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \iff \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \varphi_i \subset \operatorname{Ker} f.$$

37. Corollaire. Deux formes linéaires non nulles sont de même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

38. Théorème *(des extrema liés)*. Soient $g_1, \dots, g_m \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On considère l'ensemble

$$C \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}.$$

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert avec $C \subset \Omega$. Soit $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que
- la fonction $f|_C$ admet un extremum local en un point $x^\star \in \Omega$,
- la fonction f est différentiable en ce point $x^\star$,
- la famille $(dg_1(x^\star), \dots, dg_m(x^\star))$ est libre.

Alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ tels que

$$df(x^\star) = \lambda_1 \, dg_1(x^\star) + \dots + \lambda_m \, dg_m(x^\star). \qquad ((*))$$

39. Contre-exemple. L'hypothèse d'indépendance est nécessaire. Le minimum de la fonction $x + y^2$ sous la contrainte $x^3 - y^2$ se situe au point $(0, 0)$. Pourtant, la différentielle de la fonction $x^3 - y^2$ en ce point est nulle : la relation $(*)$ n'est pas vraie.

40. Application *(théorème spectral)*. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. L'application $x \in E \longmapsto \langle u(x), x \rangle$ admet un maximum sur la sphère unité $S \subset E$ en un point $e_1 \in S$. Le théorème des extrema liés nous donne ensuite un réel $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. En raisonnant par récurrence, l'endomorphisme u est diagonalisable en base orthonormée.

41. Application *(inégalité arithmético-géométrique)*. En optimisant la fonction $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = s$ avec $x_i, s > 0$, on obtient

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

3.2. Les invariants de similitude et la réduction de Frobenius

42. Définition. L'espace E est de dimension n. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

43. Lemme. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de polynôme minimal $\pi_u \in k[X]$. Pour tout vecteur $x \in E$, on considère l'unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in k[X]$ de l'idéal $\{P \in k[X] \mid P(u)(x) = 0\}$. Alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

44. Théorème *(réduction de Frobenius)*. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe des uniques polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r \in \mathbf{K}[X]$ et des uniques sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r \subset E$ stables par l'endomorphisme u tels que
- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;

— D2 —

- $P_r \mid \cdots \mid P_1$;
- pour tout entier $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme induit $u|_{E_i}$ sur E_i est cyclique de polynôme P_i.

45. Définition. La suite $(P_1, \dots P_r)$ de polynômes sont les *invariants de similitude* de l'endomorphisme u.

46. Notation. Pour un polynôme unitaire $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré d, on note $C_p \in \mathscr{M}_d(\mathbf{K})$ sa matrice compagnon. Plus précisément, si $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, alors

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

47. Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u ait pour matrice

$$\operatorname{diag}(C_{P_1}, \dots, C_{P_r}).$$

48. Corollaire. Deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* 2e tirage. Masson, 1983.
[3] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.