Leçon 160. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

1. Notation. On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \geqslant 1$.

1. Adjoint d'un endomorphisme

2. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

3. Définition. Avec les mêmes notations, l'endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ est l'*adjoint* de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.

4. Proposition. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^{\mathrm{t}}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

5. Proposition. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes et $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel. Alors
   - $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v$;
   - $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;
   - $(u^*)^* = u$;
   - si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$;
   - $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

6. Proposition. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par un certain endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'adjoint u^*.

7. Remarque. C'est cette proposition assez simple qui permet de faire des raisonnements par récurrence.

2. Les endomorphismes orthogonaux

2.1. Le groupe orthogonal

8. Définition. Une *isométrie* de l'espace E est une application $u \colon E \longrightarrow E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

9. Exemple. Les applications $\pm \mathrm{Id}_E$ sont des isométries de E. Les symétries orthogonales de E sont des isométries de E.

10. Théorème. Soit $u \colon E \longrightarrow E$ une application. Les points suivants sont équivalents :
   - elle est isométrique ;
   - elle est linéaire et vérifie $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

11. Théorème. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, on l'appelle le *groupe orthogonal* de E. Le groupe $\mathrm{O}(E)$ est compact dans $\mathrm{GL}(E)$.

12. Définition. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est *orthogonale* si ${}^{\mathrm{t}}AA = A\,{}^{\mathrm{t}}A = I_n$.

13. Proposition. L'ensemble $\mathrm{O}(n)$ des matrices orthogonales est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

14. Proposition. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors ce dernier est une isométrie si et seulement si la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.

15. Exemple. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\operatorname{Vect}\{(1,0,0)\}$ est la matrice orthogonale $\operatorname{diag}(1,-1,1) \in \mathrm{O}(3)$.

16. Contre-exemple. Ceci est faux si la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormée. Par exemple, dans l'espace $\mathbf{R}^2$, la symétrie $(x,y) \longmapsto (x,-y)$ est orthogonale et pourtant sa matrice dans la base $((1,0),(1,1))$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{O}(2).$$

17. Exemple. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. La *matrice de rotation d'angle* θ est la matrice

$$R_\theta \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}).$$

18. Définition. Une *réflexion* de E est une symétrie orthogonale de E par rapport à un hyperplan de E.

19. Proposition. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par une certaine isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par l'isométrie u. D1

20. Théorème. Le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, tout élément de ce dernier peut s'écrire comme la composée d'au plus n réflexions.

2.2. Réduction des endomorphismes orthogonaux

21. Théorème. On suppose que $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de l'espace E, des entiers $p, q, r \in \mathbf{N}$ avec $p + q + 2r = n$ et des réels $\theta_1, \dots, \theta_r \in \left]0, 2\pi\right[\setminus \{\pi\}$ tels que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \operatorname{diag}(I_r, -I_q, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}). \tag{1}$$

22. Corollaire. Soit $A \in \mathrm{O}(n)$ une matrice. Alors il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(n)$ telle que la matrice ${}^{\mathrm{t}}PAP$ soit de la forme (1).

23. Corollaire. Les composantes connexes de $\mathrm{O}(E)$ sont les parties fermées

$$\mathrm{SO}(E) \coloneqq \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det u = 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}^-(E) \coloneqq \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det u = -1\}.$$

24. Exemple. Les matrices $M \in \mathrm{SO}(3)$ représentent des rotations autour d'une droite de l'espace $\mathbf{R}^3$.

2.3. Notion d'angle en dimension deux

25. Notation. On suppose que l'espace E est de dimension deux.

26. Proposition. Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ des matrices orthogonales de déterminant 1 est commutatif et, plus précisément, il est isomorphe au groupe des complexes de module 1 et toute matrice $A \in \mathrm{SO}(2)$ est de la forme $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.

27. Proposition. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires. Alors il existe une unique rotation $f \in \mathrm{SO}(E)$ tel que $f(u) = v$.

28. Définition. Soit $S \subset E$ la sphère unité. On définit une action du groupe $\mathrm{SO}(2)$ sur l'ensemble S^2 par l'égalité

$$f \cdot (u,v) = (f(u), f(v)), \qquad f \in \mathrm{SO}(2),\ u, v \in S.$$

Le classe d'un élément $(u,v) \in S^2$ dans le quotient $S^2 / \mathrm{SO}(2)$ est l'*angle orienté* des vecteurs u et v. On la note (u,v). La proposition 27 permet de définir une application

$$\hat{\Phi} \colon S^2 \longrightarrow \mathrm{SO}(2) \simeq \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

29. Proposition. Cette application $\hat{\Phi}$ passe au quotient et induit une application

$$\Phi \colon S^2 / \mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

30. Définition. L'image $\Phi(u,v) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ est la *mesure* de l'angle orienté (u,v).

3. Endomorphismes symétriques

3.1. Généralités

31. Définition. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *symétrique* lorsque $u^* = u$. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique lorsque $A = {}^{\mathrm{t}}A$.
32. Exemple. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$$

est symétrique. Une symétrie orthogonale est symétrique. Quelque soit l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, les endomorphismes $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont symétriques.
33. Théorème. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.
34. Corollaire. En particulier, l'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes symétriques et l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques sont respectivement des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $n(n+1)/2$.

3.2. Le théorème spectral

35. Lemme. Les valeurs propres d'une matrice symétriques réelles sont réelles.
36. Théorème *(spectral)*. Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée. Il en va de même pour les matrices symétriques.
37. Exemple. Les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_3(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

sont semblables.
38. Contre-exemple. Le théorème est faux pour des matrices symétriques complexes : il suffit de considérer la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}).$$

39. Proposition. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Alors $|||A|||_2 = \rho(A)$.

3.3. Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs

40. Définition. Un endomorphisme symétrique $u \in \mathscr{S}(E)$ est *positif* lorsque

$$\forall x \in E, \qquad \langle x, u(x) \rangle \geqslant 0$$

et *défini positif* si

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \qquad \langle x, u(x) \rangle > 0.$$

On définit la notion de matrices symétriques positives et définies positives.
41. Proposition. Un endomorphisme symétrique est (défini) positif si et seulement si ses valeurs propres sont (strictement) positives.
42. Corollaire. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique positive si et seulement si on peut l'écrire sous la forme $A = {}^{\mathrm{t}}BB$ avec $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

3.4. Théorèmes de décomposition

43. Théorème. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Alors il existe une unique matrice $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$.
44. Théorème *(de décomposition polaire)*. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible. Alors il existe un unique couple $(O,S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$. Plus précisément, l'application

$$\left| \begin{aligned} \mathrm{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \\ (O,S) &\longmapsto OS \end{aligned} \right.$$

est un homéomorphisme.
45. Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Il existe un unique couple $(O,S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.

4. Endomorphismes normaux

4.1. Généralités

46. Définition. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *normal* s'il commute avec son adjoint u^*, c'est-à-dire si $u^* \circ u = u \circ u^*$.
47. Exemple. Les endomorphismes orthogonaux et ceux symétriques sont normaux.
48. Proposition. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal et $x \in E$ un vecteur. Alors $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
49. Proposition. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors l'orthogonal d'un sous-espace propre de l'endomorphisme u est stable par ce dernier.

4.2. Réduction des endomorphismes normaux

50. Théorème. On suppose que $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. On suppose qu'il n'admet pas de valeurs propres réelles. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de l'espace E. Alors il existe deux réels $a, b \in \mathbf{R}$ avec $b \neq 0$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \tau_{a,b} \quad \text{avec} \quad \tau_{a,b} := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

51. Théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de l'espace E et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r, a_1, b_1, \dots, a_s, b_s \in \mathbf{R}$ tels que — D2 —

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, \tau_{a_1,b_1}, \dots, \tau_{a_s,b_s}).$$

52. Définition. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *anti-symétrique* si $u^* = -u$.
53. Corollaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme anti-symétrique. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de l'espace E et des réels $b_1, \dots, b_s \in \mathbf{R}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \tau_{0,b_1}, \dots, \tau_{0,b_s}).$$

[1] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.
[2] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.
[3] Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* De Boeck Supérieur, 2021.