Leçon 161. Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

1. Notation. On considère un $\mathbf{R}$-espace affine $\mathscr{E}$ de direction E.

1. Espaces affines euclidiens

1.1. Notions d'application affine, d'isométrie et de distance

2. Définition. L'espace affine $\mathscr{E}$ est *euclidien* si sa direction E est un espace vectoriel euclidien. On le munit de la distance $d\colon \mathscr{E}\times\mathscr{E}\longrightarrow \mathbf{R}_+$ définie par

$$AB \coloneqq d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|, \qquad A,B\in\mathscr{E}.$$

On suppose désormais que l'espace affine $\mathscr{E}$ est euclidien.

3. Exemple. L'espace affine $\mathbf{R}^n$ est euclidien.

4. Proposition *(point de Fermat)*. Soient A, B et C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbf{R}^2$. On suppose que les trois angles du triangle ABC sont strictement inférieurs à $2\pi/3$. Alors la fonction

$$f\colon \left|\begin{array}{l}\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},\\ M \longmapsto MA+MB+MC\end{array}\right.$$

admet un unique point minimum.

5. Définition. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F. Une application $\varphi\colon \mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$ est *affine* s'il existe un point $O\in\mathscr{E}$ et une application linéaire $f\colon E\longrightarrow F$ tels que

$$\forall M\in\mathscr{E},\qquad f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}.$$

6. Proposition. Un telle application f ne dépend pas du point O et elle est unique. On la note $\vec{\varphi}$ et on l'appelle la *partie linéaire* de l'application affine φ.

7. Exemple. Les applications affines de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ sont celles de la forme $x\longmapsto ax+b$ avec $a,b\in\mathbf{R}$. Leurs parties linéaires sont les applications $x\longmapsto ax$.

8. Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. Une *isométrie vectorielle* de E dans F est une application linéaire $f\colon E\longrightarrow F$ telle que

$$\forall x\in E,\qquad \|f(u)\| = \|u\|.$$

9. Exemple. Les symétries orthogonales de E sont des isométries vectorielles.

10. Définition. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines euclidiens. Une *isométrie affine* de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est une application affine $\varphi\colon\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$ telle que

$$\forall A,B\in\mathscr{E},\qquad d(\varphi(A),\varphi(B)) = d(A,B).$$

11. Proposition. Une application affine $\varphi\colon\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$ est une isométrie si et seulement si l'application linéaire $\vec{\varphi}$ est une isométrie.

12. Théorème. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E dans E est un groupe. L'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathscr{E})$ des isométries affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est un groupe.

13. Définition. Une *translation* de $\mathscr{E}$ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ de partie linéaire Id_E.

14. Proposition. Une translation φ de $\mathscr{E}$ vérifie

$$u \coloneqq \overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{B\varphi(B)},\qquad A,B\in\mathscr{E}.$$

On dit que l'application φ est la translation de vecteur u et on la note t_u.

1.2. Structure générale des isométries

15. Proposition. Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. On suppose que leurs directions F et G vérifient $F\oplus G = E$. Soit $s_F\colon E\longrightarrow E$ la symétrie orthogonale par rapport à F. Étant donné un point $O\in\mathscr{E}$, l'application $\sigma_{\mathscr{F}}\colon\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}$ définie par

$$\overrightarrow{O\sigma_{\mathscr{F}}(M)} = s_F(\overrightarrow{OM}),\qquad M\in\mathscr{E}$$

est une application affine ne dépend pas du choix du point O.

16. Définition. L'application $\sigma_{\mathscr{F}}$ est la *symétrie orthogonale affine* par rapport au sous-espace affine $\mathscr{F}$.

17. Définition. Une *réflexion* de E (respectivement de $\mathscr{E}$) est un symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E (respectivement de $\mathscr{E}$).

18. Théorème. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Toute isométrie de E peut s'écrire comme une composée de p réflexions avec $p\leqslant n$. D1

19. Corollaire. Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel affine de dimension n. Toute isométrie de $\mathscr{E}$ peut s'écrire comme une composée de p réflexions avec $p\leqslant n+1$.

20. Définition. Un *déplacement* (respectivement un *anti-déplacement*) de $\mathscr{E}$ est une isométrie $\varphi\in\mathrm{Isom}(\mathscr{E})$ telle que $\det\vec{\varphi}>0$ (respectivement $\det\vec{\varphi}<0$).

21. Proposition. L'ensemble $\mathrm{Isom}^+(\mathscr{E})$ des déplacements de $\mathscr{E}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathscr{E})$.

22. Proposition. Le nombre de réflexions décomposant une isométrie est pair si et seulement si cette dernière est un déplacement.

23. Proposition. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et $\varphi\in\mathrm{Isom}(\mathscr{E})$. Alors il existe une translation t_v et un isométrie ψ de $\mathscr{E}$ telles que

- l'espace $\mathscr{F}$ des points fixes de l'application ψ ne soit pas vide :
- le vecteur v de la translation t_v appartienne à la direction de l'espace $\mathscr{F}$;
- on ait $\varphi = t_v\circ\varphi$.

De plus, le couple (v,ψ) est unique, les isométries t_v et ψ commutent et

$$F = \mathrm{Ker}(\vec{\varphi}-\mathrm{Id}_E).$$

2. Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

2.1. Définitions et premières propriétés

24. Définition. Soit $n\geqslant 1$ un entier. Une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est *orthogonale* si elle vérifie ${}^{\mathrm{t}}AA = I_n$.

25. Proposition. Une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si et seulement si son endomorphisme canoniquement associé est une isométrie vectorielle de $\mathbf{R}^n$.

26. Corollaire. Le groupe $\mathrm{O}(n)$ des matrices orthogonales de taille n est compact.

27. Définition. Une matrice orthogonale $A\in\mathrm{O}(n)$ est *spéciale* si son déterminant est positif. L'ensemble $\mathrm{SO}(n)$ des matrices orthogonales de taille n est un groupe.

28. Exemple. Toute matrice $A \in \mathrm{SO}(2)$ est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbf{R},\ a^2 + b^2 = 1,$$
c'est-à-dire qu'il existe un réel $\theta \in \mathbf{R}$ tels que
$$A = R(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
Autrement, le groupe $\mathrm{SO}(2)$ est isomorphe au groupe des complexes de module 1.

29. Application *(notion d'angle dans un plan)*. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel E. Alors il existe un et une seule isométrie $f \in \mathrm{O}(E)$ telle que $f(u) = v$. Un réel $\theta \in \mathbf{R}$ tel que la matrice $R(\theta)$ représente l'isométrie f est appelée une *mesure de l'angle* du couple (u, v).

2.2. Structure du groupe orthogonal

30. Théorème. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, trois entiers $r, s, t \in \mathbf{N}$ et des réels $\theta_1, \dots, \theta_t \in \mathbf{R}$ tels que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{diag}(I_r, -I_s, R(\theta_1), \dots, R(\theta_r)).$$

31. Exemple. La symétrie orthogonale de $\mathbf{R}^3$ par rapport à $\mathrm{Vect}\{(1,0,0)\}$ a pour matrice dans la base canonique
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

32. Corollaire. Soit $f \in \mathrm{SO}(E)$. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, deux entiers $r, s \in \mathbf{N}$ et des réels $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbf{R}$ tels que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{diag}(I_r, R(\theta_1), \dots, R(\theta_s)).$$

33. Corollaire. Le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathscr{E})$ est connexe par arcs.

34. Corollaire. Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs et le groupe $\mathrm{O}(n)$ admet deux composantes connexes par arcs que sont $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}^-(n) \coloneqq \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$.

3. Étude des isométries en petites dimensions

3.1. Classification en dimension deux

35. Proposition. Les isométries d'un plan vectoriel sont exactement l'identité, les réflexions et les rotations.

36. Définition. Une *symétrie glissée orthogonale* de $\mathscr{E}$ est une application s'écrivant sous la forme $\psi \circ t_v$ pour un réflexion ψ et un vecteur v de E.

37. Théorème. Une isométrie d'un plan affine fait partie de l'un des quatre types suivants :
- une translation (qui n'admet pas de point fixe) ;
- une rotation (qui admet un unique point fixe) ;
- une réflexion (qui admet une droite de points fixes) ;
- une symétrie glissée (qui n'admet pas de point fixe).

3.2. Classification en dimension trois

38. Proposition. Soit $f \in \mathrm{Isom}(E)$ une isométrie d'un espace euclidien E de dimension 3. Il existe une base (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle la matrice de l'isométrie f est de l'une des formes suivants :
- $A = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$: l'isométrie f est une réflexion ;
- $A = \mathrm{diag}(1, R(\theta)) \in \mathrm{SO}(2)$: l'isométrie f est une *rotation* d'axe $\mathrm{Vect}\{e_1\}$ et d'angle θ.
- $A = \mathrm{diag}(-1, R(\theta)) \in \mathrm{O}^-(2)$: l'isométrie f est une *anti-rotation* d'axe $\mathrm{Vect}\{e_1\}$ et d'angle θ.

39. Définition. Soit $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}$ une droite affine. Un *visage* d'axe $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ est une application de la forme $\psi \circ t_v$ pour une rotation ψ d'axe $\mathscr{D}$ et un vecteur v de E.

40. Théorème. Une isométrie $\varphi \in \mathrm{Isom}(\varphi)$ d'un espace affine de dimension 3 fait partie de l'un des quatre types suivants :
- une translation (qui n'admet pas de point fixe) ;
- une réflexion (qui admet un unique point fixe) ;
- une symétrie glissé (qui n'admet pas de point fixe)e ;
- une rotation (qui admet un point fixe) ;
- un visage (qui n'admet pas de point fixe) ;
- une application telle que sa partie linéaire φ soit un anti-rotation.

3.3. Isométries préservant un ensemble

41. Définition. Une isométrie $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathscr{E})$ *stabilise* une partie $X \subset \mathscr{E}$ si $\varphi(X) \subset X$. On note $\mathrm{Isom}(X)$ le groupe des isométries de $\mathscr{E}$ stabilisant X. Notons également
$$\mathrm{Isom}^+(X) \coloneqq \mathrm{Isom}(X) \cap \mathrm{Isom}^+(\mathscr{E}).$$

42. Définition. L'*enveloppe convexe* d'une partie $S \subset \mathscr{E}$ est l'ensemble des barycentres de parties finies de S à coefficients positifs. On la note $\mathrm{Conv}\, S$.

43. Définition. Soit $S \subset \mathscr{E}$. Un point $A \in X \coloneqq \mathrm{Conv}\, S$ est *extrémal* s'il n'est pas un barycentre à coefficients positifs de points de $X \setminus \{A\}$.

44. Exemple. Les sommets du cube $C \subset \mathbf{R}^3$ sont ses points extrémaux.

45. Proposition. Soit $X \subset \mathscr{E}$. On suppose que la partie X est l'enveloppe convexe d'une partie $S \subset \mathscr{E}$ et que les points de S sont extrémaux. Alors toute isométrie stabilisant X stabilise S, c'est-à-dire $\mathrm{Isom}(X) \subset \mathrm{Isom}(S)$.

46. Proposition. Soit $X \subset \mathbf{R}^3$ une partie finie possédant un centre de symétrie. Alors on dispose de morphismes de groupes
$$\mathrm{Isom}(X) \simeq \mathrm{Isom}^+(X) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$
D2

47. Théorème. Les groupes d'isométries du cube $C \subset \mathbf{R}^3$ sont
$$\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

[1] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
[2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. T. Tome second. Calvage & Mounet, 2018.