Leçon 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

1. Notation. On considère un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de deux. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Formes bilinéaires et formes quadratiques

1.1. Premières définitions

2. Définition. La *forme quadratique* associée à une forme bilinéaire $b \colon E \times E \longrightarrow \mathbf{K}$ est l'application

$$q_b \colon \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{K}, \\ x \longmapsto b(x,x). \end{array} \right.$$

3. Exemple. Soient $f, g \in E^*$. Alors la forme bilinéaire $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ définie la forme quadratique $x \longmapsto f(x)g(x)$.

4. Proposition. Soit $q \colon E \longrightarrow \mathbf{K}$ une forme quadratique. Alors

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in E, \qquad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x).$$

5. Proposition. Toute forme quadratique q sur E est associée à une unique forme bilinéaire symétrique sur E, appelée la *forme polaire* de q.

6. Proposition. Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire b. Alors

$$\forall x, y \in E, \qquad b(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}.$$

7. Exemple. Sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'application $A \longmapsto \operatorname{Tr}(A^2)$ est une forme quadratique de forme polaire $(A,B) \longmapsto \operatorname{Tr}(AB)$.

8. Définition. Un *espace quadratique* est la donnée d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F et d'une forme quadratique q sur F.

9. Définition. Soient (E,q) et (F,q') deux espaces quadratiques. Un *morphisme* entre ces deux espaces est une application linéaire $u \colon E \longrightarrow F$ telle que $q' \circ u = q$. Un *isomorphisme* est un morphisme bijectif. Les deux formes q et q' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme entre les espaces (E,q) et (F,q').

1.2. Représentations matricielle et polynomiale

10. Définition. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et une base $\mathscr{B}$ de E. Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire b. La *matrice associée* à la forme quadratique q dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) \coloneqq (b(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}).$$

11. Proposition. Les matrices de la forme q dans deux bases sont congruentes. Plus précisément, soit $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. Notons $P \coloneqq \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1)$. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(q) = {}^{\mathrm{t}}P \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(q) P.$$

12. Remarque. Cela nous donne une bijection entre l'ensemble des formes quadratiques sur E et l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$: pour une matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'application $(X,Y) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XAY$ est une forme quadratique sur $\mathbf{K}^n$.

13. Définition. À tout polynôme homogène

$$P \coloneqq \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^2 + \sum_{i<j} 2\beta_{i,j} X_i X_j \in \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n],$$

on associe une forme quadratique $\Psi(P)$ sur E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\Psi(P)) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \beta_{i,j} \\ & \ddots & \\ \beta_{j,i} & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

14. Proposition. L'application ainsi définie $P \longmapsto \Psi(P)$ entre les polynômes homogènes de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ et les formes quadratiques sur E est une bijection.

15. Exemple. La forme quadratique

$$(x,y,z) \in \mathbf{K}^3 \longmapsto x^2 + 2xy - z^2$$

est représentée, dans la base canonique, par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et par le polynôme $X^2 + 2XY - Z^2 \in \mathbf{K}[X,Y,Z]$.

16. Exemple. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $f \colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Soit $a \in \Omega$ un point. Alors l'application $d^2 f(a)$ est une forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est le hessienne de la fonction f au point a.

1.3. Noyau, rang et discriminant

17. Définition. La *dimension* d'un espace quadratique (E,q) est la dimension de l'espace vectoriel E.

18. Définition. Le *noyau* d'une forme quadratique q sur E de forme polaire b est l'ensemble

$$\operatorname{Ker} q \coloneqq \{x \in E \mid \forall y \in E,\ b(x,y) = 0\}.$$

19. Exemple. Pour une matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le noyau de la forme quadratique $X \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XAX$ est le noyau de la matrice A.

20. Définition. Le *rang* d'une forme quadratique q sur E est le rang de sa matrice dans une base quelconque.

21. Proposition. Deux formes quadratiques équivalents ont le même rang.

22. Définition. Une forme quadratique q est *non dégénérée* si $\operatorname{Ker} q = \{0\}$.

23. Exemple. La forme quadratique $A \longmapsto \operatorname{Tr}(A^2)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ n'est pas dégénérée.

24. Proposition. Une forme quadratique q sur E de forme polaire b n'est pas dégénérée si et seulement si l'application

$$\left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^*, \\ x \longmapsto b(x, \cdot) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

25. Définition. Soit q une forme quadratique non dégénérée. Notons

$$\pi\colon \mathbf{K}^\times \longmapsto \mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$$

la projection. Alors les quantités $\pi(\det \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On l'appelle le *discriminant* de la forme quadratique, notée $\operatorname{disc} q$.

26. Exemple. Le discriminant de la forme $(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2-z^2$ vaut -1.

27. Proposition. Deux formes quadratiques non dégénérées équivalentes ont le même discriminant.

2. Orthogonalité et isotropie

2.1. Orthogonalité

28. Définition. Soit q un forme quadratique sur E de forme polaire b. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont *q-orthogonaux* si $b(x,y)=0$. Le *q-orthogonal* d'une partie $A \subset E$ est l'ensemble

$$A^{\perp q} = \{x \in E \mid \forall y \in E,\ b(x,y)=0\}.$$

29. Exemple. On a $\operatorname{Ker} q = E^{\perp q}$.

30. Proposition. Soient $A, B \subset E$ deux parties. Alors
- l'ensemble $A^{\perp q}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\operatorname{Ker} q$;
- si $A \subset B$, alors $B^{\perp q} \subset A^{\perp q}$;
- $A \subset (A^{\perp q})^{\perp q}$.

31. Exemple. On considère la forme quadratique $(X,Y) \longmapsto \operatorname{Tr}(XY)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques.

32. Proposition. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors

$$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp q} - \dim(F \cap \operatorname{Ker} q) \qquad \text{et} \qquad (F^{\perp q})^{\perp q} = F + \operatorname{Ker} q.$$

2.2. Isotropie

33. Définition. Soit q une forme quadratique sur E. Un vecteur $x \in E$ est *q-isotrope* si $q(x)=0$. L'ensemble $\operatorname{Co} q$ des vecteurs q-isotropes est le *cône* de la forme q.

34. Exemple. Le cône isotrope de la forme quadratique $(x,y) \longmapsto xy$ sur $\mathbf{K}^2$ est l'ensemble $(\mathbf{K} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{K})$.

35. Proposition. Toute forme quadratique q vérifie $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Co} q$.

36. Contre-exemple. L'inclusion est fausse en toute généralité : une forme quadratique représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a un noyau nul et pourtant son cône isotrope n'est pas nul. En général, le cône isotrope n'est même pas un sous-espace vectoriel de E.

37. Proposition. Le cône isotrope est un cône, c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in \operatorname{Co} q, \qquad \lambda x \in \operatorname{Co} q.$$

38. Définition. Un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est *isotrope* si $F \cap F^{\perp q} \neq \{0\}$.

39. Proposition. Un sous-espace $F \subset E$ est *isotrope* si et seulement si $E = F \oplus F^{\perp q}$.

2.3. Groupe orthogonal

40. Définition. Un *automorphisme orthogonal* d'un espace quadratique (E,q) est un mophisme de l'espace (E,q) vers lui-même. On note $\mathrm{O}(q)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de (E,q).

41. Proposition. L'ensemble $\mathrm{O}(q)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

42. Définition. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E de forme polaire b. Alors un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est un automorphisme orthogonal si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \qquad b(u(x), u(y)) = b(x,y).$$

43. Exemple. On retrouve le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ lorsque $q(x) = \langle x, x\rangle$.

44. Remarque. Le déterminant d'un automorphisme orthogonal vaut ± 1.

45. Proposition. Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. En posant $M \coloneqq \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ et $A \coloneqq \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on a

$${}^{\mathrm{t}}AMA = M.$$

3. Classifications des formes quadratiques

3.1. Diagonalisation d'une forme quadratique

46. Définition. Soit (E,q) un espace quadratique. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est *q-orthogonale* si ses vecteurs sont deux-à-deux q-orthogonaux. Elle est *q-orthonormée* si

$$\forall i \neq j, \qquad q(e_i, e_j) = \delta_{i,j}.$$

47. Exemple. La base canonique, formée des matrices élémentaires, de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est orthogonale pour la forme $A \longmapsto \operatorname{Tr}({}^{\mathrm{t}}AA)$.

48. Théorème. Tout espace quadratique de dimension finie possède une base orthogonale.

49. Remarque. On peut appliquer l'algorithme de réduction de Gauss pour trouver une telle base. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} &xy - 2xz - 4yz + 2xt + zt = \\ &\qquad = \left(\frac{x+y-6z+2t}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y-2z-2t}{2}\right)^2 + 8\left(z - \frac{7t}{16}\right)^2 + \frac{49t^2}{32}. \end{aligned}$$

50. Corollaire. Soit (E,q) un espace quadratique de dimension n. Alors
- il existe une matrice diagonale représentant le forme q ;
- il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E^* et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que

$$q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k^2.$$

3.2. Sur le corps de complexes et réels

51. Théorème. Soit (E,q) un espace quadratique complexe de dimension n. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E et un entier $r \in [\![0, n]\!]$ tels que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \operatorname{diag}(I_r, 0).$$

52. Proposition. Soit (E, q) un espace quadratique réel de dimension n. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E et deux entiers $r, s \in \mathbf{N}$ avec $r + s \leqslant n$ tels que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \operatorname{diag}(I_r, -I_s, 0).$$

53. Définition. De tels entiers r et s sont uniques. Le couple (r, s) est la *signature* de la forme.

54. Exemple. Sur $\mathbf{R}^3$, la forme quadratique

$$x^2 + 2y^2 + 15z^2 - 4xy + 6xz - 8yz = (x - 2z + 3z)^2 - 2(y - z)^2 + 8z^3$$

est de signature $(2, 1)$.

55. Corollaire. Deux formes quadratiques réelles de même dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

D1

56. Application *(lemme de Morse)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que

- l'origine est un point critique, c'est-à-dire $df(0) = 0$;
- la forme quadratique $d^2 f(0)$ n'est pas dégénérée ;
- elle est de signature $(p, n - p)$.

Alors il existe des voisinages $U, V \subset \mathbf{R}^n$ de l'origine et un difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

- $\varphi(0) = 0$;
- pour tout point $x \in U$, on a
$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$$
où les réels $\varphi_i(x)$ sont les coordonnées du vecteurs $\varphi(x)$.

3.3. Sur les corps finis

57. Lemme. Soient $\mathbf{K}$ un corps fini et $a, b \in \mathbf{K}^\times$ deux éléments non nul. Alors l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ admet au moins une solution.

58. Proposition. Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré sur un corps fini $\mathbf{K}$. On note $\zeta \coloneqq \operatorname{disc} q$. Alors il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et un élément $\alpha \in \{1, \zeta\}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \Longrightarrow \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \alpha x_n^2.$$

59. Théorème. Deux formes quadratiques de même dimension sur un corps fini sont équivalents si et seulement si elles ont le même rang et le même discriminant.

D2

60. Application *(loi de réciprocité quadratiques)*. Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts. Alors

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2 \times (q-1)/2}.$$

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.
[2] Clément de Seguin-sPazzis. *Invitation aux formes quadratiques.* Calvage & Mounet, 2010.
[3] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* 4e édition. Cépadués, 2011.
[4] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.
[5] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Quatrième édition. Cassini, 2015.