Leçon 171. Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

1. Notation. Dans cette leçon, on considère un espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{R}$ des réels de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Formes quadratiques réelles

1.1. Formes bilinéaires et quadratiques

2. Définition. La *forme quadratique* associée à une forme bilinéaire $b\colon E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ est l'application

$$q_b\colon \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto b(x,x). \end{array} \right.$$

3. Exemple. Soient $f, g \in E^*$. Alors la forme bilinéaire $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ définie la forme quadratique $x \longmapsto f(x)g(x)$.

4. Proposition. Soit $q\colon E \longrightarrow \mathbf{K}$ une forme quadratique. Alors

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in E, \qquad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x).$$

5. Proposition. Toute forme quadratique q sur E est associée à une unique forme bilinéaire symétrique sur E, appelée la *forme polaire* de q.

6. Proposition. Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire b. Alors

$$\forall x, y \in E, \qquad b(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}.$$

7. Exemple. Sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, l'application $A \longmapsto \operatorname{Tr}(A^2)$ est une forme quadratique de forme polaire $(A,B) \longmapsto \operatorname{Tr}(AB)$.

8. Définition. Un *espace quadratique* est la donnée d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel F et d'une forme quadratique q sur F.

9. Définition. Soient (E,q) et (F,q') deux espaces quadratiques. Un *morphisme* entre ces deux espaces est une application linéaire $u\colon E \longrightarrow F$ telle que $q' \circ u = q$. Un *isomorphisme* est un morphisme bijectif. Les deux formes q et q' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme entre les espaces (E,q) et (F,q').

1.2. Représentation matricielle, rang et noyau

10. Définition. Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire b. La *matrice associée* à la forme quadratique q dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) \coloneqq (b(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

11. Exemple. La matrice de la forme quadratique $x^2 - 3xy + 5yz - z^2$ de l'espace $\mathbf{R}^3$ dans sa base canonique est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

12. Définition. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont *congruentes* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}PBP$.

13. Proposition. Les matrices de la forme q dans deux bases différentes sont congruentes. Précisément, soit $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. Notons $P \coloneqq \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1)$. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(q) = {}^{\mathrm{t}}P \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(q) P.$$

Réciproquement, deux matrices congruentes représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes.

14. Remarque. Cela nous donne une bijection entre l'ensemble des formes quadratiques sur E et l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$: pour une matrice symétrique $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, l'application $(X,Y) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XAY$ est une forme quadratique sur l'espace $\mathbf{R}^n$.

15. Définition. Le *rang* d'une forme quadratique q sur E est le rang de sa matrice dans une base quelconque, noté $\operatorname{rg} q$. Il s'agit également de la codimension du noyau de l'application linéaire

$$\psi_b\colon \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^*, \\ x \longmapsto b(x, \cdot). \end{array} \right.$$

16. Exemple. Le rang de la forme quadratique du dernier exemple vaut 3.

17. Définition. Le *noyau* d'une forme quadratique q sur E de forme polaire b est le noyau de l'application linéaire ψ_b, c'est-à-dire l'ensemble

$$\operatorname{Ker} q \coloneqq \{x \in E \mid \forall y \in E,\ b(x,y) = 0\}.$$

18. Exemple. Pour une matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le noyau de la forme quadratique $X \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XAX$ est le noyau de la matrice A.

19. Définition. Une forme quadratique q est *non dégénérée* si $\operatorname{Ker} q = \{0\}$.

1.3. Orthogonalité, isotropie

20. Définition. Soit q un forme quadratique sur E de forme polaire b. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont *q-orthogonaux* si $b(x,y) = 0$. Le *q-orthogonal* d'une partie $A \subset E$ est l'ensemble

$$A^{\perp q} = \{x \in E \mid \forall y \in E,\ b(x,y) = 0\}.$$

21. Proposition. Soient $A, B \subset E$ deux parties. Alors

- l'ensemble $A^{\perp q}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\operatorname{Ker} q$;
- si $A \subset B$, alors $B^{\perp q} \subset A^{\perp q}$;
- $A \subset (A^{\perp q})^{\perp q}$.

22. Exemple. On considère la forme quadratique $(X,Y) \longmapsto \operatorname{Tr}(XY)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques.

23. Proposition. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors

$$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp q} - \dim(F \cap \operatorname{Ker} q) \qquad \text{et} \qquad (F^{\perp q})^{\perp q} = F + \operatorname{Ker} q.$$

24. Définition. Un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est *isotrope* si $F \cap F^{\perp q} \neq \{0\}$.

25. Proposition. Si la forme q n'est pas dégénérée, alors un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est isotrope si et seulement si $E = F \oplus F^{\perp q}$.

2. Réduction et classification

2.1. De la réduction et le théorème d'inertie de Sylvester

26. Définition. Soit (E,q) un espace quadratique réel de dimension finie. Une base $(e_1,\dots,e_n)$ de l'espace E est *q-orthogonale* si les vecteurs la composant sont deux-à-deux q-orthogonaux. Elle est *q-orthonormée* si
$$\forall i \neq j, \qquad q(e_i,e_j) = \delta_{i,j}.$$
27. Exemple. La base canonique, formée des matrices élémentaires, de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale pour la forme $A \longmapsto \operatorname{Tr}({}^{\mathrm{t}}AA)$.
28. Théorème *(Gauss)*. Tout espace quadratique (E,q) de dimension finie possède une base q-orthogonale.
29. Remarque. On peut appliquer l'algorithme de réduction de Gauss pour trouver une telle base. Par exemple, on a
$$xy - 2xz - 4yz + 2xt + zt = \\ = \left(\frac{x+y-6z+2t}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y-2z-2t}{2}\right)^2 + 8\left(z - \frac{7t}{16}\right)^2 + \frac{49t^2}{32}.$$
30. Proposition *(orthogonalisation simultanée)*. Soit (E,q) un espace quadratique réel de dimension $n \geqslant 1$. Soit q' une autre forme quadratique sur E. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = I_n$ et la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q')$ soit diagonale.
31. Théorème *(d'invertie de Sylvester)*. Soit (E,q) un espace quadratique réel de dimension n. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E et deux entiers $r,s \in \mathbf{N}$ avec $r+s \leqslant n$ tels que
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \operatorname{diag}(I_r, -I_s, 0).$$
32. Définition. De tels entiers r et s sont uniques. Le couple (r,s) est la *signature* de la forme.
33. Exemple. Sur l'espace $\mathbf{R}^3$, la forme quadratique
$$x^2 + 2y^2 + 15z^2 - 4xy + 6xz - 8yz = (x - 2z + 3z)^2 - 2(y-z)^2 + 8z^3$$
est de signature $(2,1)$.
34. Corollaire. Deux formes quadratiques réelles de même dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

2.2. Le groupe orthogonal d'une forme quadratique réelle

35. Définition. Un *automorphisme orthogonal* d'un espace quadratique réel (E,q) de dimension finie est un mophisme de l'espace (E,q) vers lui-même. On note $\mathrm{O}(q)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de (E,q). Si le couple (r,s) désigne la signature de la forme q, alors cet ensemble sera noté sous la forme $\mathrm{O}(r,s)$.
36. Proposition. L'ensemble $\mathrm{O}(r,s)$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}(E)$.
37. Exemple. On retrouve le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ d'un espace euclidien $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ lorsque $q(x) = \langle x,x\rangle$.
38. Proposition. Soient (E,q) un espace quadratique réel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors cet endomorphisme u est un automorphisme orthogonaux si et seulement si
$${}^{\mathrm{t}}MAM = A \quad \text{avec} \quad M := \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) \quad \text{et} \quad A := \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$
pour une (toute) base $\mathscr{B}$ de E.
39. Théorème. L'exponentielle réalise une surjection $\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.
40. Théorème. Soient $p,q \geqslant 0$ deux entiers. Alors il existe un homéomorphisme
$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}.$$
– D1 –

2.3. L'exemple de la matrice hessienne

41. Définition. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. La *matrice hessienne* d'une fonction deux fois différentiable $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ en un point $a \in \Omega$ est la matrice
$$\operatorname{Hess} f(a) := \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(d^2 f(a)) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
où la famille $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
42. Proposition. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction deux fois différentiable.

- Si le point $x^\star$ en est un minimum local, alors $df(x^\star) = 0$ et sa différentielle seconde $d^2 f(x^\star)$ est une forme quadratique positive, c'est-à-dire
$$d^2 f(x^\star)(h,h) \geqslant 0, \qquad \forall h \in E.$$
- Si $df(x^\star) = 0$ et sa différentielle seconde $d^2 f(x^\star)$ est définie positive, alors le point $x^\star$ est un minimum local strict de la fonction f.

43. Contre-exemple. Les réciproques des deux points sont fausses. Pour le premier point, la fonction $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 - y^2$ admet un unique point critique qui est l'origine et, en ce point, sa hessienne est positive, mais l'origine n'est pas un minimum local. On considère le contre-exemple $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$ pour le second point.
44. Lemme. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage $V \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ de la matrice A_0 et une application $\Phi\colon V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que
$$\forall A \in V, \qquad A = {}^{\mathrm{t}}\Phi(A) A_0 \Phi(A).$$
45. Théorème *(lemme de Morse)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que

- l'origine est un point critique, c'est-à-dire $df(0) = 0$;
- la forme quadratique $d^2 f(0)$ n'est pas dégénérée ;
- elle est de signature $(p, n-p)$.

D2

Alors il existe des voisinages $U, V \subset \mathbf{R}^n$ de l'origine et un difféomorphisme $\varphi\colon U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

- $\varphi(0) = 0$;
- pour tout point $x \in U$, on a
$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$$
où les réels $\varphi_i(x)$ sont les coordonnées du vecteurs $\varphi(x)$.

3. Application à la géométrie : les coniques

3.1. Les coniques définies par des formes quadratiques

46. Définition. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine de direction E. Un *polynôme de degré deux* est une application $f\colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle qu'il existe un point $O \in \mathscr{E}$, une forme quadratique non nulle q sur E, une forme linéaire $\ell_O \in E'$ et une constante $c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall M \in \mathscr{E}, \qquad f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + \ell_O(\overrightarrow{OM}) + c.$$

47. Remarque. Cette définition ne dépend pas du point O choisi. Intuitivement, les polynômes de degrés deux définissant des équations de la forme

$$ax^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

48. Définition. Une *conique* est la donnée d'un polynôme de degré deux modulo une constante non nulle. Plus précisément, il s'agit d'une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ définie par

$$f \sim g \quad\iff\quad \exists \lambda \in \mathbf{R}^*,\ f = \lambda g.$$

49. Exemple. Les équations $xy = 0$ et $2xy = 0$ définissent donc la même conique. La conique d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est un cercle.

50. Définition. Une conique f est *à centre* si on peut trouver un point $\Omega \in \mathscr{E}$ tel que $\ell_\Omega = 0$. Une conique f définie par le polynôme

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + \ell_O(\overrightarrow{OM}) + c$$

est *propre* si la forme quadratique

$$Q\colon \left| \begin{array}{l} E \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \\ (u, z) \longmapsto q(u) + L(u)z + cz^2 \end{array} \right.$$

n'est pas dégénérée. Cette forme Q est l'*homogénéisée* de la conique f.

51. Exemple. Les coniques d'équations $xy = 0$ et $x^2 = 0$ ne sont pas propres. Le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est propre puisque sa forme quadratique homogénéisée $x^2 + y^2 - z^2$ n'est pas dégénérée. Ces exemples ont pour centre l'origine.

52. Proposition. Une conique est à centre si et seulement si l'une des formes quadratiques la définissant n'est pas dégénérée.

3.2. Classifications des coniques

53. Théorème *(classification euclidienne)*. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Alors toute conique propre à centre et d'image non vide est, dans un repère orthonormée dont le centre est l'origine, est d'équation

(i) ou bien de la forme $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (il s'agit d'une *ellipse*) ;
(ii) ou bien de la forme $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (il s'agit d'une *hyperbole*)

pour deux réels $a, b \geqslant 0$ (avec $0 < b \leqslant a$ dans le premier cas).

54. Remarque. Une conique non propre à centre et d'image non vide est ou bien un point ou bien deux droites sécantes.

55. Remarque. Dans le cas où la conique est à centre, elle est d'équation

(iii) de la forme $ay^2 + c = 0$ avec $a, c \in \mathbf{R}$ (il s'agit de deux droites parallèles, d'une droite et de l'ensemble vide) ;

56. Proposition. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Alors toute conique non propre d'image non vide qui n'a pas de centre de symétrie est d'équation

(iv) de la forme $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ (il s'agit d'une *parabole*).

57. Définition. Dans les cas (i) et (ii), les nombres a et b sont uniques et appelés respectivement le *demi-grand axe* et le *demi-petit axe* de l'ellipse. Dans le cas (iv), le nombre p est unique et appelé le *paramètre* de la parabole.

58. Corollaire *(classification affine)*. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine. Alors toute conique propre d'image non vide est, dans un repère bien choisi, est d'équation

(i) ou bien de la forme $x^2 + y^2 = 1$ (ellipse) ;
(ii) ou bien de la forme $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbole) ;
(iii) ou bien de la forme $y^2 = x$ (parabole).

3.3. Leurs interprétations et définitions géométriques

59. Proposition. Soit $\mathscr{E}$ un plan euclidien et f une conique d'image non vide qui n'est pas un cercle. Alors il existe un point $F \in D$ (appelé le *foyer*), un droite $D \subset \mathscr{E}$ ne contenant pas le point F (appelée *directrice*) et un réel $e \geqslant 0$ (appelé l'*excentricité*) tels que

$$\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = 0\} = \{M \in \mathscr{E} \mid FM = ed(M, D)\}.$$

Inversement, un tel ensemble est une conique et

- si $e < 1$, c'est une ellipse ;
- si $e = 1$, c'est une parabole ;
- si $e > 1$, c'est une hyperbole.

60. Remarque. Une conique admet donc un axe de symétrie.

61. Proposition. Soient $\mathscr{E}$ un plan euclidien et f une conique. Alors

- la conique f est une ellipse si et seulement s'il existe deux points $F, F' \in \mathscr{E}$ et un réel $a > \frac{1}{2}FF'$ tels que
$$\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = 0\} = \{M \in \mathscr{E} \mid MF + MF' = 2a\} \ ;$$
- la conique f est une hyperbole si et seulement s'il existe deux points $F, F' \in \mathscr{E}$ et un réel $a < \frac{1}{2}FF'$ tels que
$$\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = 0\} = \{M \in \mathscr{E} \mid |MF - MF'| = 2a\}.$$

62. Remarque. Cela permet de donner un moyen de construire géométriquement une ellipse sur une feuille.

[1] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.
[2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.
[3] Clément de Seguins-Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques.* Calvage & Mounet, 2010.
[4] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* 4e édition. Cépadués, 2011.
[5] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.
[6] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Quatrième édition. Cassini, 2015.