Leçon 181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

1. Barycentres dans un espace affine

1. Notation. On considère un espace affine réel $\mathscr{E}$ de dimension finie de direction E.

1.1. Définitions et exemples

2. Proposition. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathscr{E}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille réelle. Pour un point M, on considère le vecteur $v_M \coloneqq \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \in E$. Alors
   - si $\sum_{i\in I} \lambda_i = 0$, alors les vecteurs v_M avec $M \in \mathscr{E}$ sont égaux.
   - sinon il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que $v_G = 0$. Le point G est le *barycentre* du système pondéré $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$. On le note $\operatorname{bar}\{A_i, \alpha_i\}_{i\in I}$. Les réels α_i sont les *coefficients* du barycentre.

3. Proposition. Avec les mêmes notations et dans le second cas, tout point $O \in \mathscr{E}$ vérifie l'égalité
$$\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i\Big)\overrightarrow{OG} = \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

4. Exemple. Dans l'espace $\mathbf{R}^2$, le barycentre des quatre points $(\pm 1, \pm 1)$ avec les coefficients $\alpha_i = \frac{1}{4}$ est l'origine.

5. Définition. Lorsque les réels α_i sont tous égaux, on parle d'*isobarycentre*.

6. Exemple. L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

7. Proposition *(homogénéité)*. Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{E}$ des points et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}$ des réels de somme non nulle. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$ un réel non nul.
$$\operatorname{bar}\{(A_1, \lambda\alpha_1), \dots, (A_k, \lambda\alpha_k)\} = \operatorname{bar}\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}.$$

8. Proposition *(associativité)*. Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, soient $A_{i,1}, \dots, A_{i,k_i} \in \mathscr{E}$ des points et $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,k_i} \in \mathbf{R}$ des réels de somme non nulle ; on note
$$B_i \coloneqq \operatorname{bar}\{(A_{i,1}, \alpha_{i,1}), \dots, (A_{i,k_i}, \alpha_{i,k_i})\}.$$
Alors
$$\operatorname{bar}\{(B_i, \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j})\}_{i\in[\![1,r]\!]} = \operatorname{bar}\{(A_{i,j}, \alpha_{i,j})\}_{i\in[\![1,r]\!], j\in[\![1,k_r]\!]}.$$

9. Corollaire. Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ un système pondéré avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\beta + \gamma \neq 0$. On note G son barycentre. Alors le point d'intersection des droites (AG) et (BC) est le barycentre du système $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$.

D1 10. Proposition. Soit $(P^k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{C}^n$ qu'en notant $P^k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, elle satisfasse la relation
$$P^{k+1} = \left(\frac{z_1^k + z_2^k}{2}, \frac{z_2^k + z_3^k}{2}, \dots, \frac{z_n^k + z_1^k}{2}\right), \qquad k \in \mathbf{N}.$$
Alors la suite $(P^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers l'isobarycentre des points z_i^0.

1.2. Liens avec la structure affine

11. Définition. Une *sous-espace affine* de $\mathscr{E}$ est une partie $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ soit vide soit vérifiant qu'il existe un point $B \in \mathscr{F}$ tel que l'ensemble $\{\overrightarrow{BM} \mid M \in \mathscr{F}\} \subset E$ soit un sous-espace vectoriel de E

12. Théorème. Soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ une partie non vide. Alors les points sont équivalents :
   - la partie $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$;
   - tout barycentre d'une famille des points de $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{F}$;
   - pour tous points $A, B \in \mathscr{F}$ et réels $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ avec $\alpha + \beta = 1$, on a $\lambda A + \beta B \in \mathscr{F}$.

13. Corollaire. L'espace affine engendré par une partie $A \subset \mathscr{E}$ est l'ensemble des barycentres des familles de points de A.

14. Définition. Soit $\mathscr{F}$ un espace affine de direction F. Une application $\varphi \colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ est *affine* s'il existe un point $O \in E$ et une application linéaire $f \colon E \longrightarrow F$ tels que
$$\forall M \in \mathscr{E}, \qquad \overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM}).$$
Une telle application f ne dépend pas du point O et elle est unique : on la note $\vec{\varphi}$.

15. Exemple. Dans le cas $\mathscr{E} = \mathscr{F} = \mathbf{R}$, les applications affines $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sont celles de la forme $x \longmapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

16. Théorème. Soit $\varphi \colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ une application.
   - On suppose qu'elle est affine. Pour tout système pondéré $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}$ de $\mathscr{E}$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq 0$, on a
   $$\varphi(\operatorname{bar}\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}) = \operatorname{bar}\{(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_k), \alpha_k)\}.$$
   - On suppose que, pour tous points $A, B \in \mathscr{E}$ et tout réel $\alpha \in \mathbf{R}$, on a
   $$\varphi(\operatorname{bar}\{(A, \alpha), (B, 1-\alpha)\}) = \operatorname{bar}\{(\varphi(A), \alpha), (\varphi(B), 1-\alpha)\}.$$
   Alors l'application φ est affine.

17. Corollaire. Une application affine envoie un segment sur un segment. Une application affine préservant les points d'un système pondéré préserve aussi son barycentre.

1.3. Coordonnées barycentriques

18. Définition. Un *repère affine* de $\mathscr{E}$ est une famille $(A_0, \dots, A_n)$ de $\mathscr{E}$ telle que la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit une base de E.

19. Remarque. Si l'espace vectoriel E est de dimension n, alors tout repère affine de $\mathscr{E}$ est de cardinal $n+1$.

20. Théorème. Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. Alors tout point $M \in \mathscr{E}$ est le barycentre d'un système pondéré $\{(A_0, \alpha_0), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. Si l'on impose $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, alors le n-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est unique et il est appelé les *coordonnées barycentriques* du point M dans le repère $(A_0, \dots, A_n)$.

21. Exemple. Dans l'espace $\mathbf{R}^n$, on considère sa base canonique $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Alors les coordonnées d'un point $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ dans le repère affine $(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sont le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$.

2. Notion de convexité

2.1. Parties convexes

22. Définition. Une partie $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$ est *convexe* si, pour tous points $A, B \in \mathscr{A}$, le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathscr{A}$.

23. Exemple. Les segments sont convexes. Les boules d'un espace vectoriel normé (et pas métrique putain !) sont convexes.
24. Exemple. Les convexes de l'espace $\mathbf{R}$ sont les intervalles.
25. Proposition. Une partie est convexe si et seulement si elle est étoilée par rapport à tous ces points.
26. Remarque. Dans un espace vectoriel normé, un convexe est connexe par arcs.
27. Proposition. Toute intersection de convexes est convexes.
28. Proposition. L'image et la pré-image d'un convexe par une application affine est convexe.

2.2. Enveloppes convexes

29. Définition. L'*enveloppe convexe* d'une partie $S \subset \mathscr{E}$ est l'intersection de tous les convexes la contenant, notée $\operatorname{Conv} S \subset \mathscr{E}$.
30. Exemple. Dans l'espace $\mathbf{R}^2$, l'enveloppe convexe des trois points $(1,0)$, $(-1,0)$ et $(0,1)$ est l'intérieur du triangle dont les sommets sont ces trois points.
31. Proposition. L'enveloppe convexe d'une partie de $\mathscr{E}$ est le plus petit convexe qui la contient.
32. Théorème. L'enveloppe convexe d'une partie $S \subset \mathscr{E}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de points de S.
33. Proposition. Si la partie $S \subset \mathscr{E}$ est convexe et compacte, alors $S = \operatorname{Conv} \partial S$.
34. Théorème *(Carathéodory)*. Dans un espace affine de dimension n, l'enveloppe convexe d'une partie S est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $n+1$ points de S.
35. Application. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.
36. Exemple. L'enveloppe $\operatorname{Conv} \mathrm{O}(n) \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est compacte.

2.3. Points extrémaux et théorème de Krein-Milmann

37. Définition. Un *point extrémal* d'une partie convexe $S \subset \mathscr{E}$ est un point $M \in S$ tel que, pour tous points $A, B \in S$ et tout réel $t \in [0,1]$, on ait

$$M = tA + (1-t)B \implies t \in \{0,1\}.$$

On note $\operatorname{Ext} S$ l'ensemble des points extrémaux de S.
38. Exemple. Dans une espace vectoriel normé E, si la partie $B \subset E$ désigne une boule fermée, alors $\operatorname{Ext} B = \partial B$.
39. Proposition. Soient $S \subset \mathscr{E}$ une partie convexe et $M \in S$ un point. Alors les points suivants sont équivalents :

- $M \in \operatorname{Ext} S$;
- la partie $S \setminus \{M\}$ est convexe.

40. Théorème *(Krein-Milmann)*. Tout convexe compact non vide $S \subset \mathscr{E}$ vérifie

$$S = \operatorname{Conv}(\operatorname{Ext} S).$$

41. Proposition. Soit $S \subset \mathbf{R}^n$ une partie avec $S = \operatorname{Conv}(\operatorname{Ext} S)$. Alors le groupe des isométries stabilisant $\operatorname{Conv} S$ stabilise aussi S et, en particulier, l'isobarycentre de S.
42. Application. Les groupes des isométries positives de l'espace stabilisant le cube unité est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_4$ et celui des isométries positives et négatives est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

3. Applications de la convexité

3.1. Fonctions convexes et optimisation

43. Définition. On considère un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. Soit $C \subset E$ un convexe. Une fonction $f\colon C \longrightarrow \mathbf{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lorsque l'inégalité est stricte avec $x \neq y$ et $\lambda \in \,]0,1[$, elle est *strictement convexe*.
44. Exemple. Les fonctions $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2$ et $x > 0 \longmapsto -\ln x$ sont strict. convexes.
45. Proposition. Une fonction deux fois dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive. Une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ est continue sur son intérieur $\mathring{I}$.
46. Proposition. Soient $C \subset E$ un convexe et $f\colon C \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction strictement convexe. Alors elle admet au plus un minimum.
47. Contre-exemple. La seule convexité ne suffit pas à assurer au plus un minimum (le fonction nulle sur $\mathbf{R}$). La stricte convexité n'assure pas l'existence d'un minimum (la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$).
48. Application. Soient E un espace euclidien, $b \in E$ un vecteur et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique défini positif. Alors la fonction

$$f\colon \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle - \langle b, x\rangle \end{array} \right.$$

admet un unique point minimum.
49. Proposition. Soient H un espace de Hilbert et $C \subset H$ une partie convexe non bornée. Soit $J\colon C \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe, continue et coercive. Alors cette dernière atteint sa borne inférieure.
50. Proposition. Soient $C \subset E$ un convexe ouvert et $f\colon C \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe différentiable. Alors tout point critique de f en est un minimum global.

3.2. Inégalités de convexité

51. Proposition *(inégalité arithmético-géométrique)*. Soient $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$ des nombres réels positifs. Alors

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

52. Lemme. Pour tous réels $p, q > 0$ et $x, y \geqslant 0$ avec $1/p + 1/q = 1$, on a

$$xy \leqslant x^p/p + y^q/q.$$

53. Théorème *(inégalités de Hölder)*. Soient $p, q > 0$ deux nombres réels tels que $1/p + 1/q = 1$. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geqslant 0$ des nombres réels positifs. Alors

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1/q}.$$

54. Théorème *(Minkowski)*. Soient $p \geqslant 1$ un nombre réel et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geqslant 0$

des nombres réels positifs. Alors

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{1/p}.$$

En particulier, l'espace $\ell^p(\mathbf{N})$ muni de la norme p est un espace vectoriel normé.

3.3. Résultats en analyse fonctionnelle

55. Théorème *(Hahn-Banach, forme analytique).* Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $p\colon E\longrightarrow\mathbf{R}$ une semi-norme. Soient $G\subset E$ un sous-espace vectoriel et $g\in G^*$ une forme linéaire vérifiant

$$\forall x\in G,\qquad g(x)\leqslant p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire $f\in E^*$ prolongeant la forme linéaire g telle que

$$\forall x\in E,\qquad f(x)\leqslant p(x).$$

56. Lemme. Soit $C\subset E$ un ouvert convexe contenant le vecteur nul. La fonction

$$p\colon \left|\begin{array}{l} E\longrightarrow\mathbf{R},\\ x\longmapsto\inf\{\alpha>0 \mid \alpha^{-1}x\in C\}.\end{array}\right.$$

est une semi-norme sur E et elle vérifie les points suivants :
- il existe une constante $M>0$ telle que $0\leqslant p(x)\leqslant M\,\|x\|$ pour tout $x\in E$;
- $C=\{x\in E \mid p(x)<1\}$.

57. Corollaire. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $C\subset E$ un convexe ouvert non vide avec $C\neq E$. Soit $x_0\in E\setminus C$ un point. Alors il existe une forme linéaire continue $f\in E^*$ telle que

$$\forall x\in C,\qquad f(x)<f(x_0).$$

- D2 - 58. Application. Munissons l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\ \|_2$. Alors l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(n)$ est la boule unité fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

[1] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.
[2] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[3] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* 2e tirage. Masson, 1983.
[4] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2013.
[5] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[6] Patrice Tauvel. *Cours de géométrie.* Dunod, 2000.