Leçon 191. Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

1. La géométrie affine

1.1. Les espaces affines

1. DÉFINITION. Un *espace affine* sur un corps K est la donné d'un K-espace vectoriel E, d'un ensemble $\mathscr{E}$ et d'une action simplement transitive du groupe additif E sur l'ensemble $\mathscr{E}$. L'espace E est la *direction* de l'espace affine $\mathscr{E}$.

2. EXEMPLE. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ agit par translation sur lui-même ce qui est fait un espace affine sur le corps $\mathbf{R}$.

3. NOTATION. Cette action sera notée sous la forme $A+u = u\cdot A$ pour $u \in E$ et $A \in \mathscr{E}$. Les éléments de l'ensemble $\mathscr{E}$ sont les *points* et ceux de l'espace E les *vecteurs*. Pour deux points $A, B \in \mathscr{E}$, la simple transitivité de l'action assure l'existence d'un unique vecteur $\overrightarrow{AB} \in E$ tel que $B = A + \overrightarrow{AB}$.

4. PROPOSITION *(relation de Chasles)*. Pour tous points $A, B, C \in \mathscr{E}$, on a
   - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
   - $\overrightarrow{AA} = 0$;
   - $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

5. PROPOSITION. Soit $O \in \mathscr{E}$ un point fixé. Alors l'application

$$\Theta_O \colon \left| \begin{array}{l} \mathscr{E} \longrightarrow E, \\ M \longmapsto \overrightarrow{OM} \end{array} \right.$$

est une bijection. En particulier, ceci permet de munir l'ensemble $\mathscr{E}$ d'une structure d'espace vectoriel $\mathscr{E}_O$, appelé le *vectorialisé* de l'espace affine $\mathscr{E}$ au point O. Dans ce dernier, on peut écrire

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{O(M+N)}, \qquad M, N \in \mathscr{E}_O.$$

6. DÉFINITION. Un *sous-espace affine* de l'espace affine $\mathscr{E}$ est une partie $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ s'il existe un point $A \in \mathscr{F}$ tel que l'ensemble $\Theta_A(\mathscr{F})$ soit un sous-espace vectoriel de E.

7. PROPOSITION. Soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ un sous-espace affine. Alors il existe un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que

$$\forall B \in \mathscr{F}, \qquad \Theta_B(\mathscr{F}) = F.$$

8. EXEMPLE. Les sous-espaces affines d'un espace vectoriel E sont le sous-espace vectoriel de la forme $F + u_0$ pour un sous-espace vectoriel $F \subset E$ et un vecteur $u_0 \in E$.

1.2. Applications et isométries d'un espace affine

9. DÉFINITION. Une application $\varphi \colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ entre deux espaces affines $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ de directions respectives E et F est *affine* s'il existe un point $O \in \mathscr{E}$ et une application linéaire $f \colon E \longrightarrow F$ vérifiant

$$\forall M \in \mathscr{E}, \qquad f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}.$$

Dans ce cas, une telle application f est unique : on l'appelle le *linéarisé* de l'application affine φ et on la note sous la forme $\vec{\varphi}$.

10. EXEMPLE. Les applications affines entre deux espaces vectoriels E et F sont les applications de la forme $u \longmapsto f(u) + v_0$ avec $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v_0 \in F$. Son linéarisé est l'application linéaire f. En particulier, lorsque $\mathscr{E} = \mathscr{F} = \mathbf{R}$, les applications affines sont celles de la forme $x \longmapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

11. DÉFINITION. Une *translation* de l'espace $\mathscr{E}$ est une application affine $\varphi \colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ vérifiant $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}_E$.

12. PROPOSITION. L'image ou la pré-image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.

13. PROPOSITION. L'ensemble $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ des applications affines d'un espace affine $\mathscr{E}$ dans lui-même est un groupe et l'application

$$\left| \begin{array}{r} \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}(E), \\ \varphi \longmapsto \vec{\varphi} \end{array} \right.$$

est un morphisme surjectif dont le noyau est le groupe des translations.

14. DÉFINITION. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, c'est-à-dire tel que sa direction E soit un espace euclidien. Alors l'expression

$$AB \coloneqq d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|, \qquad A, B \in \mathscr{E}$$

définit une distance sur l'ensemble $\mathscr{E}$. Une *isométrie* entre deux espaces affines euclidiens $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ est une application $\varphi \colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ vérifiant

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B), \qquad A, B \in \mathscr{E}.$$

15. PROPOSITION. L'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathscr{E})$ des isométries d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ dans lui-même est un groupe. De plus, il est généré par les *réflexions*, c'est-à-dire les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.

1.3. Autour des barycentres et enveloppes convexes

16. PROPOSITION. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathscr{E}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille réelle. Pour un point M, on considère le vecteur $v_M \coloneqq \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \in E$. Alors
   - si $\sum_{i\in I} \lambda_i = 0$, alors les vecteurs v_M avec $M \in \mathscr{E}$ sont égaux.
   - sinon il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que $v_G = 0$. Le point G est le *barycentre* du système pondéré $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$. On le note $\mathrm{bar}\{A_i, \alpha_i\}_{i\in I}$. Les réels α_i sont les *coefficients* du barycentre.

17. PROPOSITION. Avec les mêmes notations et dans le second cas, tout point $O \in \mathscr{E}$ vérifie l'égalité

$$\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i\Big)\overrightarrow{OG} = \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

18. DÉFINITION. Lorsque les réels α_i sont tous égaux, on parle d'*isobarycentre*.

19. EXEMPLE. L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

20. PROPOSITION *(homogénéité et associativité)*. Le barycentre vérifie les deux propriétés suivantes.
   - Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{E}$ des points et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}$ des réels de somme non nulle. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$ un réel non nul.

$$\mathrm{bar}\{(A_1, \lambda\alpha_1), \dots, (A_k, \lambda\alpha_k)\} = \mathrm{bar}\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}.$$

– Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, soient $A_{i,1}, \dots, A_{i,k_i} \in \mathscr{E}$ des points et $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,k_i} \in \mathbf{R}$ des réels de somme non nulle ; on note
$$B_i := \operatorname{bar}\{(A_{i,1}, \alpha_{i,1}), \dots, (A_{i,k_i}, \alpha_{i,k_i})\}.$$
Alors
$$\operatorname{bar}\{(B_i, \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j})\}_{i \in [\![1,r]\!]} = \operatorname{bar}\{(A_{i,j}, \alpha_{i,j})\}_{i \in [\![1,r]\!], j \in [\![1,k_r]\!]}.$$

D1 21. PROPOSITION. Soit $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{C}^n$ qu'en notant $P^k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, elle satisfasse la relation
$$P^{k+1} = \left(\frac{z_1^k + z_2^k}{2}, \frac{z_2^k + z_3^k}{2}, \dots, \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \right), \qquad k \in \mathbf{N}.$$
Alors la suite $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers l'isobarycentre des points z_i^0.

22. THÉORÈME. Soit $\varphi \colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ une application.
– On suppose qu'elle est affine. Pour tout système pondéré $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}$ de $\mathscr{E}$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq 0$, on a
$$\varphi(\operatorname{bar}\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}) = \operatorname{bar}\{(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_k), \alpha_k)\}.$$
– On suppose que, pour tous points $A, B \in \mathscr{E}$ et tout réel $\alpha \in \mathbf{R}$, on a
$$\varphi(\operatorname{bar}\{(A, \alpha), (B, 1-\alpha)\}) = \operatorname{bar}\{(\varphi(A), \alpha), (\varphi(B), 1-\alpha)\}.$$
Alors l'application φ est affine.

23. COROLLAIRE. Une application affine envoie un segment sur un segment. Une application affine préservant les points d'un système pondéré préserve aussi son barycentre.

24. DÉFINITION. On considère un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. L'*enveloppe convexe* d'une partie $S \subset \mathscr{E}$ est l'intersection de tous les convexes la contenant, notée $\operatorname{Conv} S \subset \mathscr{E}$. Un *point extrémal* d'une partie convexe $C \subset \mathscr{E}$ est un point $M \in S$ tel que, pour tous points $A, B \in C$ et tout réel $t \in [0,1]$, on ait
$$M = tA + (1-t)B \implies t \in \{0, 1\}.$$
On note $\operatorname{Ext} C$ l'ensemble des points extrémaux de la partie C.

25. THÉORÈME. L'enveloppe convexe d'une partie $S \subset \mathscr{E}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de points de S.

26. PROPOSITION. Soit $S \subset \mathbf{R}^n$ une partie avec $S = \operatorname{Conv}(\operatorname{Ext} S)$. Alors le groupe des isométries stabilisant $\operatorname{Conv} S$ stabilise aussi S et, en particulier, l'isobarycentre de la partie S.

D2 27. PROPOSITION. Les groupes des isométries positives et des isométries de l'espace stabilisant le cube unité $C \subset \mathbf{R}^3$ sont
$$\operatorname{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

2. Les coniques euclidiennes et affines

2.1. Les coniques définies par des formes quadratiques

28. DÉFINITION. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine de direction E. Un *polynôme de degré deux* est une application $f \colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle qu'il existe un point $O \in \mathscr{E}$, une forme quadratique non nulle q sur E, une forme linéaire $\ell_O \in E'$ et une constante $c \in \mathbf{R}$ tels que
$$\forall M \in \mathscr{E}, \qquad f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + \ell_O(\overrightarrow{OM}) + c.$$

29. REMARQUE. Cette définition ne dépend pas du point O choisi. Intuitivement, les polynômes de degrés deux définissant des équations de la forme
$$ax^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

30. DÉFINITION. Une *conique* est la donnée d'un polynôme de degré deux modulo une constante non nulle. Plus précisément, il s'agit d'une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ définie par
$$f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}^*, \ f = \lambda g.$$

31. EXEMPLE. Les équations $xy = 0$ et $2xy = 0$ définissent donc la même conique. La conique d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est un cercle.

32. DÉFINITION. Une conique f est *à centre* si on peut trouver un point $\Omega \in \mathscr{E}$ tel que $\ell_\Omega = 0$. Une conique f définie par le polynôme
$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + \ell_O(\overrightarrow{OM}) + c$$
est *propre* si la forme quadratique
$$Q \colon \left| \begin{array}{l} E \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \\ (u, z) \longmapsto q(u) + L(u)z + cz^2 \end{array} \right.$$
n'est pas dégénérée. Cette forme Q est l'*homogénéisée* de la conique f.

33. EXEMPLE. Les coniques d'équations $xy = 0$ et $x^2 = 0$ ne sont pas propres. Le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est propre puisque sa forme quadratique homogénéisée $x^2 + y^2 - z^2$ n'est pas dégénérée. Ces exemples ont pour centre l'origine.

34. PROPOSITION. Une conique est à centre si et seulement si l'une des formes quadratiques la définissant n'est pas dégénérée.

2.2. Classifications des coniques

35. THÉORÈME *(orthogonalisation simultanée)*. Soit (E, q) un espace quadratique réel de dimension $n \geqslant 1$. Soit q' une autre forme quadratique sur E. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = I_n$ et la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q')$ soit diagonale.

36. THÉORÈME *(classification euclidienne)*. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Alors toute conique propre à centre et d'image non vide est, dans un repère orthonormée dont le centre est l'origine, est d'équation
(i) ou bien de la forme $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (il s'agit d'une *ellipse*) ;
(ii) ou bien de la forme $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (il s'agit d'une *hyperbole*)
pour deux réels $a, b \geqslant 0$ (avec $0 < b \leqslant a$ dans le premier cas).

37. REMARQUE. Une conique non propre à centre et d'image non vide est ou bien un point ou bien deux droites sécantes.

38. REMARQUE. Dans le cas où la conique est à centre, elle est d'équation
(iii) de la forme $ay^2 + c = 0$ avec $a, c \in \mathbf{R}$ (il s'agit de deux droites parallèles, d'une droite et de l'ensemble vide) ;

39. PROPOSITION. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Alors toute conique non propre d'image non vide qui n'a pas de centre de symétrie est d'équation
(iv) de la forme $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ (il s'agit d'une *parabole*).

40. Définition. Dans les cas (i) et (ii), les nombres a et b sont uniques et appelés respectivement le *demi-grand axe* et le *demi-petit axe* de l'ellipse. Dans le cas (iv), le nombre p est unique et appelé le *paramètre* de la parabole.

41. Corollaire *(classification affine)*. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine. Alors toute conique propre d'image non vide est, dans un repère bien choisi, est d'équation

(i) ou bien de la forme $x^2 + y^2 = 1$ (ellipse) ;
(ii) ou bien de la forme $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbole) ;
(iii) ou bien de la forme $y^2 = x$ (parabole).

2.3. Leurs interprétations et définitions géométriques

42. Proposition. Soit $\mathscr{E}$ un plan euclidien et f une conique d'image non vide qui n'est pas un cercle. Alors il existe un point $F \in D$ (appelé le *foyer*), un droite $D \subset \mathscr{E}$ ne contenant pas le point F (appelée *directrice*) et un réel $e \geqslant 0$ (appelé l'*excentricité*) tels que

$$\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = 0\} = \{M \in \mathscr{E} \mid FM = ed(M, D)\}.$$

Inversement, un tel ensemble est une conique et

- si $e < 1$, c'est une ellipse ;
- si $e = 1$, c'est une parabole ;
- si $e > 1$, c'est une hyperbole.

43. Remarque. Une conique admet donc un axe de symétrie.

44. Proposition. Soient $\mathscr{E}$ un plan euclidien et f une conique. Alors

- la conique f est une ellipse si et seulement s'il existe deux points $F, F' \in \mathscr{E}$ et un réel $a > \frac{1}{2}FF'$ tels que
$$\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = 0\} = \{M \in \mathscr{E} \mid MF + MF' = 2a\} \ ;$$
- la conique f est une hyperbole si et seulement s'il existe deux points $F, F' \in \mathscr{E}$ et un réel $a < \frac{1}{2}FF'$ tels que
$$\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = 0\} = \{M \in \mathscr{E} \mid |MF - MF'| = 2a\}.$$

45. Remarque. Cela permet de donner un moyen de construire géométriquement une ellipse sur une feuille.

3. Construction à la règle et au compas

3.1. Les nombres constructibles

46. Définition. Soit $E \subset \mathbf{R}^2$ un ensemble des points de l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^2$. On considère l'ensemble $\mathrm{Fig}(E)$ des objets géométriques suivants :

- les droites (AB) avec $A, B \in E$ avec $A \neq B$;
- les cercles de centre O de rayon AB avec $A, B, O \in E$ avec $A \neq B$.

Un point $M \in \mathbf{R}^2$ est *constructible à partir de l'ensemble* E s'il est l'intersection entre deux objets distincts de l'ensemble $\mathrm{Fig}(E)$. Il est *constructible* s'il existe des parties $E_0, \dots, E_n \subset \mathbf{R}^2$ et des points $M_1, \dots, M_n \in \mathbf{R}^2$ tels que

- $A_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$;
- $M \in A_n$;
- $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$ pour $i > 0$;
- pour $i > 0$, le point M_i est constructible à partir de l'ensemble A_{i-1}.

47. Exemple. Pour deux points $A, B \in \mathbf{R}^2$, le milieu du segment $[AB]$ est constructible à partir des points A et B. Les points de la forme $(0, n)$ ou $(n, 0)$ avec $n \in \mathbf{N}$ sont constructibles.

48. Définition. Un nombre réel $x \in \mathbf{R}$ est *constructible* s'il existe deux points constructibles $M, N \in \mathbf{R}^2$ vérifiant $|x| = MN$.

3.2. Des outils de la théorie des corps

49. Théorème. L'ensemble K des nombres réels constructibles est corps. De plus, pour tout nombre réel constructible $a \in K$, le nombre $\sqrt{|a|}$ est aussi constructible.

50. Remarque. Pour la stabilité par multiplication et quotient, on utilise le théorème de Thalès. Pour la stabilité par racine carré, c'est le théorème de Pythagore qui intervient.

51. Théorème. Soit $a \in \mathbf{R}$ un nombre réel. Alors il est constructible si et seulement s'il existe des réels $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ tels qu'en notant $K_1 = \mathbf{Q}(a_1)$ et $K_{i+1} = K_i(a_i)$, les degrés $[K_{i+1} : K_i]$ sont égaux à 2 et on ait $a \in K_n$.

52. Corollaire *(Wantzel)*. Pour tout nombre constructible $x \in K$, il est algébrique sur le corps $\mathbf{Q}$ et le degré $[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}]$ est une puissance de deux.

53. Exemple. Le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible puisque $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}] = 3$, son polynôme minimal étant le polynôme $X^3 - 2$.

[1] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
[2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.
[3] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.
[4] Patrice Tauvel. *Cours de géométrie*. Dunod, 2000.