Leçon 201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.

1. Notation. Dans toute cette leçon, on considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes et les différents espaces vectoriels seront sur ce corps.

1. Des espaces de fonctions continues

1.1. Continuité, uniforme continuité et modes de convergence

2. Proposition. Soient X un espace métrique et E un espace vectoriel. Alors l'ensemble $\mathscr{C}(X, E)$ des fonctions continues de X dans E est un espace vectoriel.
3. Définition. Soient X un ensemble quelconque et E un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de X dans E
 – *converge simplement* vers une fonction $f\colon X \longrightarrow E$ si
$$\forall x \in X, \qquad f_n(x) \longrightarrow f(x)\ ;$$
 – *converge uniformément* vers une fonction $f\colon X \longrightarrow E$ si
$$\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| \longrightarrow 0.$$
4. Remarque. La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque est fausse : la suite constituée des fonctions $x \in [0, 1[\longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbf{N}$ converge simplement vers la fonction nulle et elle ne converge pas uniformément.
5. Théorème. Soient X un espace métrique et E un espace vectoriel normé. Alors l'application définie par l'égalité
$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$
est une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, E)$ des fonctions continues bornées de X dans E.
6. Corollaire. Si l'espace E est de Banach, alors l'espace $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, E)$ l'est aussi.
7. Application *(théorème de prolongement de Tietze)*. Soient X un espace métrique et $Y \subset X$ une partie fermée. Alors toute application continue sur Y dans $\mathbf{R}$ se prolonge par continuité sur X.
8. Théorème. Une limite uniforme de fonctions continues est continue.
9. Définition. Soient X et Y deux espaces métriques. Une fonction $f\colon X \longrightarrow Y$ est *uniformément continue* si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in X, \qquad d_X(x, y) < \delta \quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
10. Remarque. La continuité uniforme implique la continuité, mais la réciproque est fausse comme on peut le constater avec la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2$.
11. Théorème. Soient X un espace métrique et Y un espace métrique complet. Soit $D \subset X$ une partie dense. Alors toute application uniformément continue de D dans Y se prolonge par uniforme continuité sur X.

1.2. Les fonctions continues sur un compact

12. Proposition. Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique. Alors l'application définie par l'égalité
$$d_\infty(f, g) \coloneqq \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$$
est une distance sur l'ensemble $\mathscr{C}(X, Y)$.
13. Exemple. L'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$ est un espace de Banach.
14. Théorème *(Heine)*. Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique. Alors toute application continue de X dans Y est uniformément continue.
15. Application *(deuxième théorème de Dini)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles définies sur un segment $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction continue $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f.
16. Définition. Le *module de continuité* d'une fonction continue $f\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{K}$ est la fonction $\omega_f\colon \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par l'égalité
$$\omega_f(h) \coloneqq \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in [0, 1],\ |u - v| \leqslant h\}.$$
Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, le *n-ième polynôme de Bernstein* associé à la fonction f est le polynôme
$$B_n f(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \in \mathbf{K}[x].$$
17. Lemme. Soit $f\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue. Alors
 – lorsque $h \longrightarrow 0$, on a $\omega_f(h) \longrightarrow 0$;
 – pour tous réels $\lambda, t \geqslant 0$, on a $\omega_f(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1)\omega_f(t)$.
18. Théorème *(Bernstein)*. Soit $f\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue. Alors D1
 – la suite $(B_n f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$;
 – plus précisément, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \|f - B_n f\|_\infty \leqslant C\omega_f\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$
19. Corollaire *(théorème de Weierstrass)*. Toute fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbf{K}$ est une limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

1.3. De la compacité dans les espaces de fonctions continues

20. Définition. Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique. Une partie $A \subseteq \mathscr{C}(X, Y)$ est *équicontinue* en un point $x \in X$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que
$$\forall y \in X,\ \forall f \in A, \qquad d_X(x, y) < \delta \quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
La même partie A est *relativement compacte* si son adhérence $\overline{A}$ est compacte dans l'espace $\mathscr{C}(X, Y)$ muni de la distance d_∞.
21. Remarque. Comme l'espace X est compact, une partie A est équicontinue en tout point si et seulement si elle est *uniformément équicontinue*, c'est-à-dire
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X,\ \forall f \in A, \qquad d_X(x, y) < \delta \quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
22. Théorème *(Ascoli)*. Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique. Soit $A \subseteq \mathscr{C}(X, Y)$ une partie. Alors les points suivants sont équivalents :
 – la partie A est équicontinue en tout point et les ensembles $\{f(x) \mid f \in A\} \subset Y$ avec $x \in X$ sont relativement compacts ;

– la partie A est relativement compacte.

23. Exemple. Soient $L, M > 0$ deux réels. L'ensemble des fonctions L-lipschitziennes bornées par le réel M est relativement compact.

24. Application *(théorème de Cauchy-Arzelà-Peano)*. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $B \subset \mathbf{R}^n$ une boule ouverte. Soit $f : I \times B \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction continue. Alors tout problème de Cauchy associé à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ admet une solution.

2. Les espaces de Lebesgue

2.1. Des grands espaces vectoriels normés

25. Définition. Soit $p \geqslant 1$ un réel. On définit l'ensemble $\mathscr{L}^p(\mathbf{R})$ des fonctions mesurables $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$ telles que les fonctions f^p soit intégrables. On le munit de la semi-norme $\| \, \|_p$ définie par l'égalité

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

On définit ensuite l'ensemble $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$ comme l'ensemble des classes d'équivalences de la relation d'égalité presque partout sur $\mathscr{L}^p(\mathbf{R})$.

26. Exemple. L'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et à support compact peut être muni des normes $\| \, \|_p$.

27. Remarque. Il n'y a aucune inclusion entre les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$. Mais pour tout compact $K \subset \mathbf{R}$ et tous entiers $q \leqslant p$, l'inclusion $\mathrm{L}^p(K) \subset \mathrm{L}^q(K)$ est vraie.

28. Proposition. L'espace $(\mathrm{L}^p(\mathbf{R}), \| \, \|_p)$ est un espace vectoriel normé.

29. Théorème *(Riesz-Fischer)*. Les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$ avec $p \geqslant 1$ sont complets.

2.2. Le cas hilbertien

30. Définition. L'expression $\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{\mathbf{R}} f \overline{g}$ définit un produit scalaire sur l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ ce qui en fait un espace de Hilbert.

31. Définition. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une *fonction poids* sur I est une fonction mesurable $\rho : I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_I |x|^n \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

L'ensemble $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\rho \, \mathrm{d}x$ est muni du produit scalaire définit par l'égalité $\langle f, g \rangle = \int_I f \overline{g} \rho$.

32. Remarque. Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$, il existe une famille orthonormale de polynômes unitaires échelonnés en degré, les *polynômes orthogonaux*.

33. Théorème. Soient $\rho : I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction poids et $\alpha > 0$ un réel vérifiant

$$\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.

34. Exemple. Avec $\rho(x) = e^{-x^2}$, les polynômes obtenus sont les *polynômes de Hermite*

$$\frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [e^{-x^2}] \in \mathbf{R}[x].$$

3. Vers plus de régularité

3.1. Les fonctions continûment dérivables et infiniment dérivables

35. Théorème. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors les points suivants sont équivalents : D2

- l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{f(\cdot + a)\}_{a \in \mathbf{R}} \subset \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ engendré par les translatés de la fonction f est de dimension finie ;
- la fonction f est une solution d'un système différentiel homogène à coefficients constants, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ et des réels $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ non tous nuls tels que $a_n f^{(n)} + \cdots + a_0 f = 0$.

36. Exemple. On a $\exp' = \exp$ et $\mathrm{Vect}\{\exp(\cdot + a)\}_{a \in \mathbf{R}} = \mathrm{Vect}\{\exp\}$.

37. Proposition. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. L'ensemble des fonctions dérivables sur I (respectivement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ou de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I) et à valeurs dans $\mathbf{K}$ est un espace vectoriel.

38. Théorème. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ et dérivable en aucun point est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.

39. Proposition. L'ensemble $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}^\infty(I) = \mathscr{D}(I)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact et à valeurs dans $\mathbf{K}$ est un espace vectoriel normé pour la norme $\| \, \|_\infty$.

40. Théorème. L'espace $\mathscr{D}(I)$ est dense dans les espaces $\mathrm{L}^p(I)$ avec $p \in [1, +\infty[$ et dans l'espace $\mathscr{C}_0(I)$ des fonctions continues qui tendent vers zéro aux bords de I.

3.2. L'espace de Schwartz et la transformée de Fourier

41. Définition. Pour une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, sa *transformée de Fourier* est la fonction $\hat{f} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par la relation

$$\mathscr{F} f(\xi) = \hat{f}(\xi) \coloneqq \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} \, \mathrm{d}\xi, \qquad \xi \in \mathbf{R}.$$

42. Théorème *(Plancherel)*. Soit $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ une fonction. Alors $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. En particulier, la partie $\mathscr{F}(\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}))$ est dense dans L^2. D3

43. Corollaire. Il existe un unique opérateur de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ dans lui-même qui coïncide avec la transformée de Fourier sur $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$.

44. Définition. Une fonction $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ est *de Schwartz* si

$$\forall k, \ell \in \mathbf{N}, \qquad \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^k f^{(\ell)}(x)| < +\infty.$$

On note $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de Schwartz. Ce dernier est muni de la famille des semi-normes N_p avec $p \in \mathbf{N}$ définies par l'égalité

$$N_p(\phi) \coloneqq \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{p} \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^k f^{(\ell)}(x)|.$$

Une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ converge vers une fonction $\phi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ si

$$\forall p \in \mathbf{N}, \qquad N_p(\phi_n - \phi) \longrightarrow 0.$$

45. Exemple. On peut écrire l'inclusion $\mathscr{D}(\mathbf{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbf{R})$.

46. Proposition. La classe $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel qui est stable par dérivation et par multiplication par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

47. Théorème. L'espace $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbf{R})$.

48. Théorème. La transformation de Fourier induit un automorphisme de l'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. De plus, ce dernier et son inverse sont continus sur $\mathscr{S}(\mathbf{R})$.
49. Définition. On définit l'espace
$$\mathrm{BL}^2 := \{u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}) \mid \operatorname{supp} \hat{u} \subset I\} \quad \text{avec} \quad I := [-1/2, 1/2].$$
D4
50. Théorème *(d'échantillonage de Shannon)*. L'espace BL^2 vérifie les propriétés :
- l'espace BL^2 est de Hilbert ;
- toute fonction $u \in \mathrm{BL}^2$ possède un représentant dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$, c'est-à-dire continu et tendant vers 0 à l'infini ;
- la suite $(\operatorname{sinc}(\cdot - k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2 ;
- pour une fonction $u \in \mathrm{BL}^2$, on a
$$u = \sum_{k\in\mathbf{Z}} u(k) \operatorname{sinc}(\cdot - k)$$
où la série converge uniformément et dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$.

3.3. Les fonctions holomorphes

51. Proposition. L'ensemble $\mathscr{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ est un espace vectoriel.
52. Théorème *(formule de Cauchy)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et γ un lacet dans Ω. Soient $z \in \Omega \setminus \operatorname{Im}\gamma$ un point et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors
$$f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta.$$
53. Théorème. Une fonction holomorphe sur un ouvert Ω est développable en série entière en tout point de Ω. En particulier, toute fonction holomorphe sur Ω est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω (au sens du calcul différentiel).
54. Théorème *(Weierstrass)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Alors cette dernière est holomorphe et la suite $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction f'.
55. Théorème *(Montel)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose qu'elle est uniformément bornée sur tout compact de Ω, c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in K, \qquad |f_n(z)| \leqslant C_K.$$
Alors elle admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe.
56. Proposition. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $(K_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une exhaustion compacte de cet ouvert Ω. L'expression
$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} \frac{p_i(f-g)}{1 + p_i(f-g)} \quad \text{avec} \quad p_i(f) := \sup_{z\in K_i} |f(z)|$$
définit une distance sur l'ensemble $\mathscr{H}(\Omega)$ et la topologie induit est celle de la convergence sur tout compact.
57. Corollaire. L'espace $\mathscr{H}(\Omega)$ est fermé dans l'espace $\mathscr{C}(\Omega)$ muni de la même distance. Les parties bornées de $\mathscr{H}(\Omega)$ sont relativement compactes dans $\mathscr{H}(\Omega)$.

4. Des fonctions aux distributions

4.1. Notion de distribution

58. Définition. Une *distribution* sur I est une forme linéaire $T\colon \mathscr{D}(I) \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que, pour tout compact $K \subset I$, il existe deux constantes $C > 0$ et $p \in \mathbf{N}$ telles que
$$\forall \phi \in \mathscr{D}(I), \qquad \operatorname{supp}\phi \subset K \quad \Longrightarrow \quad |\langle T, \phi\rangle| \leqslant C \max_{k\leqslant p} \sup_{x\in K} |\phi^{(k)}(x)|.$$
On note $\mathscr{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I.
59. Exemple. Pour toute fonction localement intégrable $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$, l'application
$$T_f : \left| \begin{array}{l} \mathscr{D}(I) \longrightarrow \mathbf{K}, \\ \phi \longmapsto \displaystyle\int_I f\phi \end{array} \right.$$
est une distribution sur I.
60. Théorème. L'application obtenue $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I) \longrightarrow \mathscr{D}'(I)$ est une injection.
61. Remarque. Elle n'est pas surjective puisque la distribution $\delta_0 \colon \phi \longmapsto \phi(0)$ n'est pas issue d'une fonction localement intégrable.

4.2. Les espaces de Sobolev et leurs applications

62. Définition. L'*espace de Sobolev* est l'ensemble
$$\mathrm{H}^1(]0,1[) := \{u \in \mathrm{L}^2(]0,1[) \mid u' \in \mathrm{L}^2(]0,1[) \text{ dans } \mathscr{D}'(]0,1[)\}$$
munit du produit scalaire $\langle u, v\rangle_{\mathrm{H}^1} := \langle u, v\rangle_{\mathrm{L}^2} + \langle u', v'\rangle_{\mathrm{L}^2}$.
63. Proposition. Soit $u \in \mathrm{H}^1(]0,1[)$ une fonction de Sobolev. Alors il existe une unique fonction $\overline{u} \in \mathscr{C}^0([0,1])$ égale presque partout à la fonction u et vérifiant
$$\forall x, y \in [0,1], \quad \overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t.$$
64. Proposition. L'adhérence de $\mathscr{D}(]0,1[)$ dans $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ s'écrit
$$\mathrm{H}^1_0(]0,1[) := \mathrm{H}^1(]0,1[) \cap \{f \in \mathscr{C}^0(]0,1[) \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$
65. Proposition *(inégalité de Poincaré)*. Il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall u \in \mathrm{H}^1_0(]0,1[), \qquad \|u\|_2 \leqslant C\|u'\|_2.$$
66. Théorème *(Lax-Milgram)*. Soient H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur H. Soit $\varphi \in H'$ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique élément $x \in H$ tel que
$$\forall y \in H, \qquad a(x,y) = \varphi(y).$$
67. Définition. Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$. Alors le problème
$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{sur }]0,1[, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$
admet une unique solution faible dans $\mathrm{H}^1_0(]0,1[)$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $u \in \mathrm{H}^1_0(]0,1[)$ telle que
$$\forall v \in \mathrm{H}^1_0(]0,1[), \qquad \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv.$$

Développements

- Tanguy :
  - théorème 42 et corollaire 43 [8] ;
  - théorème 50.
- Téofil :
  - théorème 18 (et lemme 17) [7] ;
  - théorème 35 [4].

Bibliographie

[1] Éric Amar et Étienne Matheron. *Analyse complexe.* 2e édition. Cassini, 2020.
[2] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[3] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* 2e tirage. Masson, 1983.
[4] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Algèbre 1.* Cassini, 2001.
[5] François Golse. *Distribution, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles.* Les Éditions de l'École polytechnique, 2020.
[6] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[7] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.
[8] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* 3e édition. Dunod, 1998.

Annexes

Inclusions dans les espaces fonctionnels. Les inclusions entre les espaces L^p ne sont vraies que si le support est compact.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \mathrm{H}^0_1 \arrow[d, hook] & & & \\
 & & \mathscr{C}_0 & & & \mathrm{H}_1 \arrow[d, hook] & \mathrm{BL}^2 \arrow[dl] & & \\
\mathscr{D} \arrow[r, hook] & \mathscr{S} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, two heads, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, hook] & \mathscr{C}_c \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathrm{L}^\infty \arrow[r, hook] & \mathrm{L}^p \arrow[r, hook] & \mathrm{L}^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, two heads, "\mathscr{F}"] & \mathrm{L}^1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\mathscr{F}"] & \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}} \arrow[r, hook] & \mathscr{D}' \\
 & \mathscr{S} & \mathscr{C}^\infty & \mathscr{H} \arrow[l, hook] & & \mathrm{L}^2 & \mathscr{C}_0 & &
\end{tikzcd}$$