Leçon 204. Connexité. Exemples et applications.

I. Connexité et connexité par arcs

I.1. Espaces connexes et premières propriétés

1. Définition. Un espace topologique X est *connexe* si, pour tous ouverts O_1 et O_2 de X tels que $X = O_1 \sqcup O_2$, on a $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.

2. Exemple. Le segment $[0,1] \subset \mathbf{R}$ est connexe. Un ensemble muni de sa topologie discrète n'est pas connexe. En particulier, l'espace $\mathbf{Z}$ n'est pas connexe.

3. Proposition. Soit X un espace topologique. Les points suivants sont équivalents :
- l'espace X est connexe ;
- pour tous fermés F_1 et F_2 de X tels que $X = F_1 \sqcup F_2$, on a $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$;
- les seuls parties ouvertes et fermées de X sont X et $\emptyset$;
- toute application continue de X dans $\mathbf{Z}$ est constante.

4. Définition. Une partie $Y \subset X$ est *connexe dans l'espace* X si l'ensemble Y muni de la topologie induite est connexe.

5. Proposition. Soit $A \subset X$ une partie. Alors toute partie connexe $C \subset X$ qui rencontre l'intérieur $\mathring{A}$ et l'extérieur $X \setminus \overline{A}$ de A rencontre la frontière.

6. Théorème. Soit X et Y deux espaces topologiques.
- Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue. Si l'espace X est connexe, alors l'image $f(X)$ est connexe.
- Soient $A \subset X$ une partie connexe et $B \subset X$ une partie vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$. Alors cette dernière est connexe.

7. Application. Tout segment $[a,b] \subset \mathbf{R}$ est connexe.

8. Remarque. L'image réciproque d'un espace connexe n'est pas connexe. En effet, l'image réciproque du segment $[1,4]$, qui est connexe, par l'application $x \longmapsto x^2$ est l'ensemble $[-2,-1] \sqcup [1,2]$, qui n'est pas connexe.

9. Proposition. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vide. Alors le produit $\prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si chaque espace X_i l'est.

I.2. Chemins et connexité par arcs

10. Définition. Un *chemin* dans l'espace X reliant deux points $a,b \in X$ est une application continue $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

11. Définition. Un espace topologique X est *connexe par arcs* si, pour tout couple de points de X , il existe un chemin dans X les reliant.

12. Exemple. Le graphe d'une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est connexe par arcs. La sphère $\mathbf{U} \subset \mathbf{C}$ est connexe par arcs : deux points $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ de la sphère $\mathbf{U}$ sont reliés par le chemin

$$t \in [0,1] \longmapsto e^{i[(1-t)\theta_1 + t\theta_2]} \in \mathbf{U}.$$

L'ensemble $\mathbf{C}^*$ est connexe par arcs.

13. Remarque. Dans un espace vectoriel normé E, toute partie convexe $C \subset E$ est connexe par arcs : deux points $a,b \in C$ sont reliés par le chemin $t \longmapsto (1-t)a + tb$.

14. Théorème. Un espace connexe par arcs est connexe.

15. Contre-exemple. La réciproque est fausse : l'ensemble $\overline{\{\sin(1/x) \mid x > 0\}}$ est connexe mais pas connexe par arcs. Toutefois, en géométrie o-minimale, la réciproque est vraie.

I.3. Composantes connexes

16. Définition. Soient $x,y \in X$ deux points. On écrit $x \sim y$ si les points x et y sont contenues dans une même partie connexe de l'espace X. La *composante connexe* du point x est sa classe d'équivalence pour la relation $\sim$.

17. Proposition. Soit $x \in X$ un point.
- La composante connexe du point x est la réunion de toutes les parties connexes contenant ce point x, c'est-à-dire la plus grande partie connexe le contenant.
- Elle est fermé dans l'espace X.

18. Remarque. De la même façon, on définit les composantes connexes par arcs.

19. Exemple. L'union $[-2,-1] \cup [1,2]$ possède deux composantes connexes, à savoir les intervalles $[-2,-1]$ et $[1,2]$.

20. Proposition. Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes et fermées telles que

$$X = \bigsqcup_{i\in I} \omega_i.$$

Alors les composantes connexes de l'espace X sont les parties ω_i.

II. La connexité en analyse réelle et complexe

II.1. Le cas de la droite réelle

21. Théorème. Les parties connexes de la droite réelle sont exactement ses intervalles.

22. Théorème *(des valeurs intermédiaires)*. Soient X un espace topologique connexe et $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Soient $x,y \in X$ deux points et $\alpha \in [f(x), f(y)]$ un réel. Alors il existe un point $z \in X$ tel que $f(z) = \alpha$.

23. Application. Un polynôme à coefficients réels et de degré impair admet une racine réelle.

24. Théorème *(Darboux)*. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors l'image $f'(I)$ est un intervalle.

25. Théorème. Toute fonction continue d'un segment de la droite réelle dans lui-même admet un point fixe.

26. Proposition. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}$ un ouvert. Alors il existe une unique famille $(a_i, b_i)_{i\in I}$ au plus dénombrables de réels $a_i, b_i \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \Omega$ telle que $\Omega = \bigsqcup_{i\in I}]a_i, b_i[$.

27. Exemple. L'ouvert $\mathbf{R}^*$ s'écrit sous la forme $]-\infty, 0[\sqcup]0, +\infty[$.

II.2. Passage du local au global

28. Proposition. Soient X un espace topologique connexe et Y un espace topologique. Alors toute application continue et localement constante $X \longrightarrow Y$ est constante.

29. Application. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $\Omega \subset E$ une partie ouverte. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow F$ une fonction différentiable de gradient nul. Alors cette dernière est constante.

30. Théorème *(Cauchy-Lipschitz maximal)*. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction continue et lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Alors le problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

31. Contre-exemple. Le caractère lipschitzien est nécessaire : le problème

$$\{x(0) = 0$$

admet au moins deux solutions maximales distinctes, à savoir la fonction nulle et la fonction cube sur $\mathbf{R}$.

II.3. En analyse complexe

32. Théorème *(principe du prolongement analytique)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes. Si elle coïncident sur un ouvert non vide de Ω, alors elle sont égales sur Ω.

33. Théorème. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Soit $a \in \Omega$ un zéro de cette dernière. Alors il existe un unique entier $m \in \mathbf{N}$ et une unique fonction holomorphe $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ telles que

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = (z-a)^m g(z) \qquad \text{et} \qquad g(a) \neq 0.$$

34. Corollaire *(principe des zéros isolés)*. Les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe sont isolés.

35. Application. La fonction $\Gamma : \{\mathrm{Re} > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$.

36. Définition. Un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ est simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet dans Ω est homotope dans Ω à un lacet constant.

37. Remarque. Intuitivement, un ouvert simple connexe est un ouvert sans trou.

38. Exemple. Tout disque est un ouvert simplement connexe. Cependant, l'ouvert $\mathbf{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

39. Théorème. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe.

- pour tout lacet γ dans Ω et toute fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, on a
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \;;$$
- toute fonction holomorphe sur Ω admet une primitive holomorphe ;
- toute fonction holomorphe $\Omega \longrightarrow \mathbf{C}^*$ admet un logarithme holomorphe.

D1 40. Théorème *(de la représentation conforme de Riemann)*. Tout ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$ distinct de $\mathbf{C}$ est conformément équivalent au disque unité $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un biholomorphisme $\Omega \longrightarrow \mathbf{D}$.

III. Connexité dans les espaces de matrices

III.1. Quelques groupes topologiques de matrices

41. Proposition. Soit $n \geqslant 1$ un entier. L'ensemble $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ des matrices symétriques réelles définies positives est connexe par arcs. L'ensemble $\mathrm{SO}(n)$ des matrices réelles orthogonales positives est connexe par arcs.

42. Corollaire. Le groupe topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes, à savoir les ensembles

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R}) \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid \det A > 0\}$$
$$\text{et} \qquad \mathrm{GL}_n^-(\mathbf{R}) \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid \det A < 0\}.$$

43. Proposition. Le groupe topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

44. Proposition. Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, le groupe topologique $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est connexe par arcs.

45. Proposition. Le groupe topologique $\mathrm{O}(n)$ possède deux composantes connexes, à savoir les ensemble $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}^-(n) \coloneqq \{P \in \mathrm{O}(n) \mid \det P = -1\}$.

III.2. Application de la connexité à la surjectivité de l'exponentielle

46. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice à coefficients complexes. Alors le groupe topologique $\mathbf{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbf{C}[C]$. D2

47. Théorème. L'exponentielle matricielle complexe réalise un surjection

$$\exp : \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$

48. Corollaire. L'image de l'exponentielle matricielle réelle est l'ensemble

$$\exp \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^{\times 2} \coloneqq \{A^2 \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\}.$$

[1] Éric Amar et Étienne Matheron. *Analyse complexe.* Cassini, 2004.
[2] Hervé Queffelec. *Topologie.* 5e édition. Dunod, 2016.
[3] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.
[4] Maxime Zavidovique. *Un Max de Math.* Calvage & Mounet, 2013.