Leçon 205. Espaces complets. Exemples et applications.

I. Suites de Cauchy et complétude

I.1. Suites de Cauchy

1. Définition. Soit E un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E est *de Cauchy* si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall p, q \geqslant N, \qquad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$
2. Proposition. Soit E un espace métrique. Alors
 - toute suite de Cauchy est bornée ;
 - toute suite convergente est de Cauchy.

3. Remarque. La notion de suite de Cauchy est purement métrique. En effet, la suite réelle $(n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas de Cauchy pour la distance usuelle $(x, y) \longmapsto |x - y|$, mais elle l'est pour la distance $(x, y) \longmapsto |\mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, y|$ bien que ces deux-là soient équivalentes.
4. Exemple. La suite réelle $(\ln n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est pas de Cauchy.
5. Proposition. Soient d et d' deux distances un ensemble E rendant uniformément continue l'application identité $(E, d) \longrightarrow (E, d')$. Alors les espaces métriques (E, d) et (E, d') ont les mêmes suites de Cauchy.
6. Remarque. Les applications uniformément continues transforment une suite de Cauchy en une autre suite de Cauchy. Ceci est faut pour des applications justes continues : la suite réelle $(1/n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est de Cauchy, mais la suite $(n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne l'est pas.

I.2. Espaces complets

7. Définition. Un espace métrique est *complet* si toutes ses suites de Cauchy convergent dans cet espace.
8. Exemple. Les espaces $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ sont complets. L'espace $\mathbf{Q}$ n'est pas complet. L'espaces des fonctions $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, \mathbf{R})$ est complet pour un ensemble X.
9. Proposition. Toute partie complète d'un espace métrique est fermée. Toute partie fermée d'un espace complet est complète.
10. Proposition. Soient E_1, …, E_n des espaces métriques. Le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ est complet si et seulement si chaque espace E_i l'est.
11. Application. Soient E un espace métrique complet et $k \in \,]0, 1[$ un réel. Alors toute application k-contractante de E dans E admet un unique point fixe.
12. Contre-exemple. L'hypothèse de complétude est nécessaire. En effet, la fonction $x \in \,]0, 1[\,\longmapsto x/2 \in \,]0, 1[$ n'admet pas de point fixe.

I.3. Le théorème de Baire et ses conséquences

13. Théorème *(Baire)*. Soit E un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts dense de E. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} O_n$ est dense dans E.
14. Remarque. Cela est équivalent à dire que, pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fermés d'intérieur vide de E, l'union $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide.
15. Application. Un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable n'est pas complet.
16. Application. L'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ qui sont continues et nulle part dérivables est dense.
17. Application. Toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N}, \qquad \varphi^{(n)}(x) = 0$$
est polynomiale.

II. Les espaces de Banach

II.1. Généralité et premiers exemples

18. Définition. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.
19. Exemple. Les espaces $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ sont de Banach.
20. Théorème. Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente de E converge dans E.
21. Exemple. L'espace $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme $\|\ \|_{\mathrm{L}^1([0,1/2])}$ n'est pas complet : la série $\sum X^n$ converge absolument, mais elle ne converge pas.
22. Proposition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si l'espace F est complet, alors l'espace $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$ l'est. En particulier, le dual topologique E' est complet.
23. Proposition. Soient X un espace métrique et Y un espace métrique complet. Soit $D \subset X$ une partie dense. Alors toute fonction continue de D dans Y se prolonge en une fonction continue sur X.

II.2. Analyse fonctionnelle dans les espaces de Banach

24. Théorème *(Banach-Steinhaus)*. Soient E et F deux espace vectoriel normé. On suppose que le premier est complet. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$ telle que
$$\forall x \in E, \qquad \sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty.$$
Alors
$$\sup_{i\in I} |||T_i||| < +\infty.$$
25. Application. Il existe une fonction continue 2π-périodique qui est différente de sa série de Fourier. Plus précisément, sa série de Fourier diverge à l'origine.
26. Théorème *(de l'application ouverte)*. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$ une application linéaire continue surjective. Alors il existe une constante $c > 0$ tel que
$$T(\mathrm{B}_E(0, 1)) \supset \mathrm{B}_F(0, c).$$
27. Corollaire. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$ une application linéaire continue bijective. Alors son inverse T^{-1} est continu.
28. Application. Soient $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E qui en font un espace de Banach. S'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\|\ \|_1 \leqslant C\|\ \|_2$, alors les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont équivalentes.
29. Corollaire *(théorème du graphe fermé)*. Soient E et F deux espaces de Banach.

Soit $T \in \mathscr{L}_c(E,F)$ une application linéaire continue. On suppose que son graphe est fermé dans $E \times F$. Alors l'application T est continue.

II.3. L'archétype : les espaces de Lebesgue

30. Définition. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $p \geqslant 1$. L'*espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$, modulo l'égalité presque partout, telles que

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} < +\infty.$$

L'*espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$, modulo l'égalité presque partout, qui sont presque partout bornées ; on notera

$$\|f\|_\infty \coloneqq \inf\{C \geqslant 0 \mid |f| \leqslant C \text{ presque partout}\}.$$

- D1 - 31. Théorème *(Riesz-Fischer).* Pour tout réel $p \geqslant 1$ ou $p = \infty$, l'espace $(\mathrm{L}^p(\Omega), \|\ \|_p)$ est complet.

32. Théorème. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ convergeant vers une fonction f dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge presque partout vers la fonction f.

33. Théorème. Les espaces $\mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ sont réflexifs. Cependant, les espaces $\mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ ne le sont pas.

34. Théorème. Soit $\varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega)'$. Alors il existe une fonction $u \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ telle que

$$\varphi(f) = \int_\Omega uf, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\Omega).$$

III. Les espaces de Hilbert

III.1. Produit scalaire, complétude et théorème de projection

35. Définition. Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ telle que la norme $x \longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ rende complet l'espace E.

36. Exemple. Les espaces $\mathbf{R}^n$ ou $\ell^2(\mathbf{N})$ sont de Hilbert.

37. Théorème *(de projection sur un convexe fermé).* Soient H un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Pour tout point $x \in H$, il existe un unique élément $p_C(x) \in C$ telle que

$$\|x - p_C(x)\| = \mathrm{d}(x, C).$$

De plus, ce dernier est caractérisé par les assertions suivantes :

- $p_C(x) \in C$;
- $\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in C$.

38. Théorème. Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors $H = F \oplus F^\perp$.

39. Contre-exemple. L'hypothèse de complétude est nécessaire. En effet, plaçons-nous dans l'espace $H \coloneqq \ell^2(\mathbf{N})$ et considérons son sous-espace $F \coloneqq \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ des suites presque nulles. On peut écrire que $\overline{F} = H$ et $F^\perp = \{0\}$, donc $H \neq F \oplus F^\perp$.

40. Théorème *(Riesz).* L'application $y \in H \longmapsto \langle \cdot, y\rangle \in H'$ est une isométrie surjective.

III.2. Compacité faible et optimisation

41. Définition. Soit H un espace de Hilbert réel. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de H *converge faiblement* vers un élément $x \in H$ si

$$\forall y \in H, \qquad \langle x_n, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle.$$

42. Exemple. La suite $(e^{in\cdot})_{n\in\mathbf{N}}$ de l'espace $\mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbf{C})$ converge faiblement vers la fonction nulle grâce au lemme de Riemann-Lebesgue.

43. Théorème. Toute suite bornée de l'espace H admet une sous-suite faiblement convergente.

44. Proposition. Soient $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide et $J\colon C \longrightarrow \mathbf{R}$ une application convexe continue. On suppose qu'elle est coercive si la partie C n'est pas bornée. Alors elle atteint son minimum sur C. D2

45. Application. Soient $u \in \mathscr{L}(H)$ un endomorphisme symétrique défini positif et $b \in H$ un vecteur. Alors l'application

$$\left|\begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle - \langle b, x\rangle \end{array}\right.$$

admet un unique minimum au point $u^{-1}(b)$.

III.3. L'espace des fonctions de carré intégrable

46. Remarque. On a vu que l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est de Hilbert.

47. Application. Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ une sous-tribu. Pour une variable $X \in \mathrm{L}^2(\mathscr{F})$, on note $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] \coloneqq p_{\mathrm{L}^2(\mathscr{G})}(X)$. Cette définition s'étend, par uniforme continuité, en une application $\mathbf{E}[\cdot \mid \mathscr{G}]\colon \mathrm{L}^1(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathscr{G})$.

48. Définition. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ est la fonction

$$\hat{f}\colon \left|\begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \xi \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}\right.$$

49. Théorème *(Plancherel).* Il existe une application $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ satisfaisant les points suivants :

- lorsque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, la fonction $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de la fonction f ;
- pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, on a $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$;
- l'application $\hat{}$ est un isomorphisme ;
- pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, en notant

$$\phi_A(\xi) \coloneqq \int_{|x|\leqslant A} f(x) e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \psi_A(\xi) \coloneqq \int_{|x|\leqslant A} \hat{f}(x) e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$$

  avec $A > 0$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\|\phi_A - f\|_2 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \|\psi_A - \hat{f}\|_2 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$$

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* 2e tirage. Masson, 1983.
[3] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* 3e tirage. Masson, 1982.