# **Leçon 207.** Prolongement de fonctions. Exemples et applications

1. Définition. Soient $E$, $\tilde{E}$ et $F$ trois ensembles. Une fonction $\tilde{f} \colon \tilde{E} \longrightarrow F$ *prolonge* une autre fonction $f \colon E \longrightarrow F$ lorsque $E \subset \tilde{E}$ et $\tilde{f}|_E = f$.

## 1. Prolongement par continuité

2. Notation. On considère un intervalle de $I$ de $\mathbf{R}$.

### 1.1. Résultat principaux

3. Proposition. Soient $a \in I$ un réel et $f \colon I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Si la limite de $f(x)$ existe lorsque $x \longrightarrow a$ et $x \in I$, alors la fonction $f$ se prolonge en une unique fonction continue $\tilde{f} \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$. De plus, cette dernière vérifie

$$\tilde{f}|_{I\setminus\{a\}} = f \quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

4. Exemple. Les fonctions $x \neq 0 \longmapsto \sin(x)/x$ et $x \neq 0 \longmapsto (e^x - 1)/x$ se prolongent par continuité en $0$.

5. Contre-exemple. La fonction $x \neq 0 \longmapsto \sin(1/x)$ ne se prolonge pas par continuité en $0$ puisque la quantité $\sin(1/x)$ n'admet pas de limite lorsque $x \longrightarrow 0$.

6. Proposition. Soit $f \colon I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si la limite de $f'(x)$ existe lorsque $x \longrightarrow a$, alors la fonction $f$ se prolonge en une unique fonction $I \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

7. Corollaire. Soit $k \in \mathbf{N}$. Soit $f \colon I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Si les limites de $f^i(x)$ existe lorsque $x \longrightarrow a$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, alors la fonction $f$ se prolonge en une unique fonction $I \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$.

8. Exemple. La fonction $\varphi \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par la relation

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

9. Application *(fonctions plateaux)*. Soient $U \subset \mathbf{R}$ un ouvert et $K \subset U$ un compact. Alors il existe une fonction $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, [0,1])$ telle que

$$\operatorname{supp}(f) \subset U \quad \text{et} \quad f|_K = 1.$$

10. Proposition. Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques séparés et $f, g \colon X \longrightarrow Y$ deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense de $X$. Alors $f = g$.

11. Application. Les seules fonctions continues $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

sont les fonctions linéaires.

— D1 —

12. Théorème *(Tietze)*. Soient $X$ un espace métrique et $Y \subset X$ une partie fermée. Soit $g_0 \colon Y \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Alors cette dernière se prolonge en une fonction continue $f_0 \colon X \longrightarrow \mathbf{R}$.

### 1.2. Application aux équations différentielles

13. Notation. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}$ un ouvert et $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. On considère une fonction continue $f \colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ et l'équation différentielle

$$y' = f(t, y). \tag{1}$$

14. Proposition. Soient $a, b, c \in I$ trois réels vérifiant $a < b < b$. Soient $y_1 \colon ]a, b[ \longrightarrow \mathbf{R}$ et $y_2 \colon ]b, c[ \longrightarrow \mathbf{R}$ deux solutions de l'équation (1). Si $\ell := \lim_{t \to b^-} y_1(t) = \lim_{t \to b^+} y_2(t)$, alors la fonction $y \colon ]a, c[ \longrightarrow \mathbf{R}$ donnée par l'égalité

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{si } t < b, \\ y_2(t) & \text{si } t > b, \\ \ell & \text{si } t = b \end{cases}$$

est une solution de l'équation (1).

15. Exemple. L'équation $y'(t) = \sin|t|$ admet comme solution

$$t \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{cases} \cos t - 1 & \text{si } t \leqslant 0, \\ 1 - \cos t & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

16. Théorème *(Cauchy-Lipschitz)*. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. On suppose que la fonction $f$ est localement lipschitzienne en sa seconde variable. Alors le problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

admet une unique solution maximale $x \colon J \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur un intervalle $J = ]T_*, T^*[ \subset I$.

17. Théorème *(des bouts)*. On suppose $I = ]a, b[$. Soit $x \colon ]T_*, T^*[ \longrightarrow \mathbf{R}$ une solution maximale du problème (2). Alors

- ou bien $T_* = b$ ;
- ou bien $T_* < b$ et $|x(t)| \longrightarrow +\infty$ lorsque $t \longrightarrow T^*$.

18. Application. Soient $y_0 \in \mathbf{R}^n$ un point et $U \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ tendant vers $+\infty$ en $\infty$. Alors les solutions maximales du système gradient

$$\begin{cases} y' = -\nabla U(y), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

sont définis sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$.

## 2. Prolongement dans les espaces fonctionnels

### 2.1. Applications uniformément continues

19. Théorème. Soient $E$ et $F$ deux espace métriques tels que le second soit complet. Soient $D \subset E$ une partie dense et $f \colon D \longrightarrow F$ une application uniformément continue. Alors l'application $f$ se prolonge en une unique fonction continue $E \longrightarrow F$. De plus, ce prolongement est uniformément continu.

20. Contre-exemple. Le théorème est faux lorsque l'espace d'arrivé $F$ n'est pas complet. En effet, la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbf{Q}} \colon \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ ne se prolonge pas en une fonction

$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Q}$.

21. CONTRE-EXEMPLE. Le théorème est également faux sans l'hypothèse d'uniforme continuité. En effet, la fonction $x > 0 \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbf{R}$ est uniformément continue, mais son prolongement $\mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ n'est l'est pas.

22. EXEMPLE. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilité et $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ une sous-tribu. Alors l'application d'espérance conditionnelle

$$\mathbf{E}[\cdot \mid \mathscr{G}] \colon \mathrm{L}^2 \cap \mathrm{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow \mathrm{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$$

est uniformément continue et se prolonge donc à $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

### 2.2. Application à la transformée de Fourier

23. NOTATION. On note $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ l'espace de Schwarz.

24. PROPOSITION. L'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ est dense dans l'espace $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

25. DÉFINITION. La *transformée de Fourier* d'une fonction de Schwartz $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ est la fonction $\hat{\varphi} \colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par l'égalité

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} f(x) \,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbf{R}^d.$$

26. THÉORÈME. L'application de transformée de Fourier $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d) \longmapsto \hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ est un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. De plus, elle s'étend de manière unique à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ et ce prolongement est un isométrie.

### 2.3. Théorème de Hahn-Banach

27. THÉORÈME. Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, $p \colon E \longrightarrow \mathbf{R}$ une semi-norme, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g \colon G \longrightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire telle que $g \leqslant p$. Alors elle se prolonge en une unique forme linéaire $f \colon E \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $f \leqslant p$.

28. COROLLAIRE. Soient $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g \in G'$ une forme linéaire continue. Alors elle se prolonge en une unique forme linéaire $f \in E'$ vérifiant $\|f\| = \|g\|$.

29. COROLLAIRE. Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. L'application canonique $J \colon E \longrightarrow E^{**}$ est injective et de norme une.

## 3. Holomorphie

30. NOTATION. Dans cette section, on considère un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ et l'ensemble $\mathscr{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur $U$.

### 3.1. Prolongement holomorphe

31. THÉORÈME. Une fonction $U \longrightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de $U$.

32. THÉORÈME. On suppose que $U$ est connexe. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Si $D := f^{-1}(\{0\}) \subset U$ admet un point d'accumulation dans $D$, alors $f = 0$.

33. CONTRE-EXEMPLE. Il faut que le point d'accumulation soit dans $D$. En prenant la fonction $z \in \mathbf{C} \longmapsto \sin(\pi/z)$, l'ensemble $D$ admet le point d'accumulation $0 \notin D$.

34. COROLLAIRE. Deux fonctions de $\mathscr{H}(U)$ coïncidant sur un ensemble possédant une point d'accumulation sont égales.

35. APPLICATION. L'exponentielle complexe est le seul prolongement analytique à $\mathbf{C}$ de l'exponentielle réelle.

### 3.2. Singularités effaçables et fonctions méromorphes

36. DÉFINITION. Un point $a \in \mathbf{C}$ est une *singularité effaçable* d'une fonction $f \in \mathscr{H}(U)$ s'il est possible de prolonger $f$ en une fonction holomorphe sur $U \cup \{a\}$.

37. THÉORÈME. Soient $f \in \mathscr{H}(U)$ et $a \in \mathbf{C} \setminus U$. Alors les points suivants sont équivalents :

(i) le point $a$ est une singularité effaçable ;
(ii) la fonction se prolonge en une fonction continue sur $U \cup \{a\}$ ;
(iii) la fonction $f$ est bornée sur un voisinage épointé de $a$ ;
(iv) lorsque $z \longrightarrow a$, on a $(z-a)f(z) \longrightarrow 0$.

38. EXEMPLE. La fonction $z \in \mathbf{C}^* \longrightarrow \sin(z)/z$ admet une singularité effaçable en 0.

39. PROPOSITION. La fonction *gamma d'Euler*

$$\Gamma \colon \left| \begin{array}{l} \{\mathrm{Re} > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \qquad z \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

s'étend en une unique fonction holomorphe sans zéro sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$ et la fonction $1/\Gamma$ est entière.

40. PROPOSITION. La fonction *zêta de Riemann*

$$\zeta \colon \left| \begin{array}{l} \{\mathrm{Re} > 1\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \qquad s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array} \right.$$

s'étend en une unique fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{1\}$.

## 4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

### 4.1. Espace de Sobolev

41. DÉFINITION. L'*espace de Sobolev* est l'ensemble

$$\mathrm{H}_0^1(]0,1[) := \{u \in \mathrm{L}^2(]0,1[) \mid u' \in \mathrm{L}^2(]0,1[) \text{ dans } \mathscr{D}'(]0,1[)\}$$

munit du produit scalaire $\langle u, v\rangle_{\mathrm{H}^1} := \langle u, v\rangle_{\mathrm{L}^2} + \langle u', v'\rangle_{\mathrm{L}^2}$.

42. PROPOSITION. Soit $u \in \mathrm{H}^1(]0,1[)$. Alors il existe une unique fonction $\overline{u} \in \mathscr{C}^0([0,1])$ égale presque partout à la fonction $u$ et vérifiant

$$\forall x, y \in [0,1], \quad \overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t) \,\mathrm{d}t.$$

43. PROPOSITION. L'adhérence de $\mathscr{D}(]0,1[)$ dans $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ s'écrit

$$\mathrm{H}_0^1(]0,1[) := \mathrm{H}^1(]0,1[) \cap \{f \in \mathscr{C}^0(]0,1[) \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

44. REMARQUE. En quelque sorte, les fonctions de l'espace $\mathrm{H}_0^1(]0,1[)$ se prolongent aux points 0 et 1 en des fonctions continues.

D2

#### 4.2. Un problème de Dirichlet simple

45. Notation. Soit $f\colon ]0,1[ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{sur } I \coloneqq ]0,1[, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

46. Définition. Une *solution faible* du problème (3) est une fonction $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$ telle que

$$\forall v \in \mathrm{H}_0^1(I), \qquad \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv.$$

47. Proposition. Une solution classique du problème (3) est une solution faible.

48. Proposition. Lorsque $f \in \mathrm{L}^2(I)$, le problème (3) admet une unique solution dans $\mathrm{H}_0^1(I)$.


[1] Éric Amar et Étienne Matheron. *Analyse complexe.* Cassini, 2004.
[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* 2e tirage. Masson, 1983.
[3] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[4] Hervé Queffélec et Claude Zully. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.