Leçon 208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

1. Notation. Dans cette leçon, on considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes.

1. Espaces vectoriels normés

1.1. Normes et topologie

2. Définition. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Une *norme* sur l'espace E est une application $\| \, \| : E \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les points suivants :

- pour tout vecteur $x \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
- pour tout vecteur $x \in E$, les assertions $\|x\| = 0$ et $x = 0$ sont équivalentes ;
- pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \| \, \|)$ est un $\mathbf{K}$-*espace vectoriel normé*

3. Exemple. L'espace $(\mathbf{R}, | \, |)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. Pour un réel $p \geqslant 1$, les espaces $\mathbf{K}^n$ muni de la norme définie par l'égalité

$$\|x\|_p \coloneqq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p}, \qquad x \coloneqq (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^n$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.

4. Exemple. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de ce dernier. Pour un vecteur $x \in E$ qu'on écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbf{K}$, on pose $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Alors l'application $\| \, \|_\infty$ est une norme sur E.

5. Exemple. Soient X un ensemble quelconque et E un espace vectoriel normé. Alors l'ensemble $\mathscr{B}(X, E)$ des fonctions bornées $X \longrightarrow E$ muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est un espace vectoriel normé.

6. Remarque. Un espace vectoriel normé $(E, \| \, \|)$ est un espace métrique pour la distance $(x, y) \in E^2 \longmapsto \|x - y\|$ et on le munit de la topologie induite par celle-ci.

7. Proposition. Soit E un espace vectoriel normé. Pour deux vecteurs $x, y \in E$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x + y\|.$$

8. Définition. Soit E un espace vectoriel normé, $x \in E$ un vecteur et $r > 0$ un réel.

- La *boule ouverte* de centre x et de rayon r est l'ensemble
$$\mathrm{B}(x, r) \coloneqq \{y \in E \mid \|y - x\| < r\}.$$
- La *boule fermée* de centre x et de rayon r est l'ensemble
$$\overline{\mathrm{B}}(x, r) \coloneqq \{y \in E \mid \|y - x\| \leqslant r\}.$$
- La *sphère* de centre x et de rayon r est l'ensemble
$$\mathrm{S}(x, r) \coloneqq \{y \in E \mid \|y - x\| = r\}.$$

9. Proposition. Une partie $A \subset E$ est ouverte si et seulement si, pour tout vecteur $x \in A$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset E$.

1.2. Compacité et équivalence des normes

10. Application. Soient E un espace vectoriel normé compact et $f : E \longrightarrow E$ une application vérifiant

$$\forall x, y \in E, \qquad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Alors elle admet un point fixe.

11. Théorème *(Bolzano-Weirstrass)*. Une partie $A \subset E$ est compact si et seulement si, de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A.

12. Définition. Une partie $A \subset E$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset \mathrm{B}(0, M)$

13. Exemple. Les boules et sphères sont bornées.

14. Théorème. Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est fermée bornée.

15. Contre-exemple. La réciproque est fausse. En effet, considérons l'espace $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme

$$a_0 + \cdots + a_n X^n \longmapsto \max(|a_0|, \dots, |a_n|).$$

Alors la boule unité fermée est fermée et bornée, mais elle n'est pas compacte puisque la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente.

16. Proposition. Les parties compactes de l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme $\| \, \|_\infty$ pour la base canonique sont les parties fermés et bornés de $\mathbf{R}^n$.

17. Définition. Deux normes N_1 et N_2 sur l'espace E sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \qquad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

18. Théorème. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

19. Contre-exemple. La réciproque est fausse. Les normes

$$f \longmapsto \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f \longmapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

ne sont pas équivalentes sur l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$: on considère des fonctions « triangles ».

20. Corollaire. Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.

21. Corollaire. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

22. Théorème *(Riesz)*. Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

2. Applications linéaires continues

2.1. Définitions, caractérisation et exemples

23. Définition. Une *application linéaire continue* entre deux espaces vectoriels normés E et F est une application continue $f : E \longrightarrow F$ vérifiant

$$\forall x, y \in E, \ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \qquad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

24. Proposition. Soit E un espace vectoriel normé. Alors les applications

$$(x,y)\in E^2 \longmapsto x+y, \qquad (\lambda,x)\in \mathbf{K}\times E \longmapsto \lambda x \qquad \text{et} \qquad x\in E\longmapsto \|x\|$$

sont continues.

25. Théorème. Soit $f\colon E\longrightarrow F$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- la fonction f est continue sur l'espace E ;
- elle est continue au point 0 ;
- elle est bornée sur la boule unité fermée ;
- elle est bornée sur la sphère unité ;
- il existe un réel $M>0$ tel que $\|f(x)\|\leqslant M\|x\|$ pour tout vecteur $x\in E$;
- elle est lipschitzienne ;
- elle est uniformément continue.

26. Exemple. L'application linéaire

$$\varphi\colon f\in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})\longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue lorsque l'on munit l'espace $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ de la norme infinie.

27. Contre-exemple. L'application linéaire

$$f\in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})\longmapsto f(0)$$

n'est pas continue sur l'espace $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 \coloneqq \int_0^1 |f|$.

28. Théorème. On suppose que l'espace E est de dimension finie. Alors toute application linéaire $E\longrightarrow F$ est continue.

29. Définition. Pour toute application $f\in\mathscr{L}_c(E,F)$, on définit sa *norme subordonnée* comme la quantité

$$|||f||| \coloneqq \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|.$$

L'application $|||\ |||$ est une norme sur l'espace $\mathscr{L}_c(E,F)$.

30. Proposition. Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés.

- Pour toute application $f\in\mathscr{L}_c(E,F)$, on a
$$\forall x\in E, \qquad \|f(x)\|\leqslant |||f|||\,\|x\|.$$
- Pour toutes applications $f\in\mathscr{L}_c(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}_c(F,G)$, on a
$$|||g\circ f|||\leqslant |||g|||\,|||f|||.$$

31. Exemple. La norme subordonnée de l'application φ du point 26 vaut $|||\varphi|||_\infty = 1$.

2.2. Le cas des formes linéaires : le théorème de Hahn-Banach

32. Notation. Dans cette sous-section, on considère un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.

33. Proposition. Une forme linéaire $\varphi\in E^*$ est continue si et seulement si son noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé dans E.

34. Définition. Le *dual topologique* de l'espace E est l'ensemble E' des formes linéaires continues sur E.

35. Théorème *(Hahn-Banach, forme analytique)*. Soit $p\colon E\longrightarrow \mathbf{R}$ une semi-norme. Soient $G\subset E$ un sous-espace vectoriel et $g\in G^*$ une forme linéaire telle que

$$\forall x\in G, \qquad g(x)\leqslant p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire $f\in E^*$ qui prolonge la forme linéaire g et qui vérifie

$$\forall x\in E, \qquad f(x)\leqslant p(x).$$

36. Corollaire. Soient $G\subset E$ un sous-espace vectoriel et $g\in G'$ une forme linéaire continue. Alors il existe une forme linéaire continue $f\in E'$ qui prolonge la forme linéaire g et qui vérifie $|||f||| = |||g|||$.

37. Définition. Un *hyperplan* est un ensemble de la forme $\{f=\alpha\}\coloneqq f^{-1}(\{\alpha\})$ pour une forme linéaire $f\in E^*$ et un réel $\alpha\in\mathbf{R}$. On dit qu'il *sépare au sens large* deux parties $A,B\subset E$ si

$$\forall x\in A, \quad f(x)\leqslant\alpha \qquad \text{et} \qquad \forall x\in B, \quad f(x)\geqslant \alpha.$$

On dit qu'il les *sépare au sens strict* s'il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que

$$\forall x\in A, \quad f(x)\leqslant\alpha-\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall x\in B, \quad f(x)\geqslant \alpha+\varepsilon.$$

38. Théorème *(Hahn-Banach, première forme géométrique)*. Soient $A,B\subset E$ deux parties convexes, non vides et disjoints. On suppose que la partie A est ouverte. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare les parties A et B au sens large.

39. Corollaire *(Hahn-Banach, seconde forme géométrique)*. Soient $A,B\subset E$ deux parties convexes, non vides et disjoints. On suppose que la partie A est fermée et que la partie B est compacte. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare les parties A et B au sens strict.

40. Application. On munit l'espace $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique puis l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme subordonnée associée. Alors l'enveloppe convexe du groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est la boule unité fermée de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. — D1 —

3. Des espaces particuliers

3.1. Les espaces de Banach

41. Définition. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

42. Exemple. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est de Banach.

43. Théorème *(Riesz-Fischer)*. Pour tout $p\geqslant 1$, l'espace $(\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d),\|\ \|_p)$ est complet.

44. Proposition. Dans un espace de Banach E, toute série absolument convergente de E converge dans E.

45. Corollaire. Soient E et F deux espaces de Banach et $T\in\mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire continue. On suppose qu'elle est *presque surjective*, c'est-à-dire qu'il existe deux réels $\alpha\in\,]0,1[$ et $C>0$ tels que

$$\forall y\in F, \qquad \|y\|\leqslant 1 \quad\Longrightarrow\quad \exists x\in E,\ \|y-Tx\|\leqslant\alpha \text{ et } \|x\|\leqslant C.$$

Alors elle est surjective et, plus précisément, on a

$$\forall y\in F, \qquad \|y\|\leqslant 1 \quad\Longrightarrow\quad \exists x\in E,\ y=Tx \text{ et } \|x\|\leqslant \frac{C}{1-\alpha}.$$

46. Théorème *(Tietze)*. Soient X un espace métrique et $Y\subset X$ une partie fermée. Alors toute application continue $g_0\colon Y\longrightarrow\mathbf{R}$ se prolonge en une application continue $f_0\colon X\longrightarrow\mathbf{R}$. — D2 —

47. Théorème *(Baire).* Soit E un espace de Banach.

- Soit $(O_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses. Alors l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} O_n$ est dense.
- Soit $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Alors l'union $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} O_n$ est d'intérieur vide.

48. Application. L'ensemble des fonctions continues et nulles parties dérivables sur $[0,1]$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.

49. Théorème *(Banach-Steinhaus).* Soient E et F deux espaces de Banach et $(T_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)$. On suppose que

$$\forall x \in E, \qquad \sup_{i \in I} \|T_i x\| < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} |||T_i||| < +\infty.$$

50. Application. Il existe une fonction continue 2π-périodique qui n'est pas égal à la somme de sa série de Fourier.

51. Théorème *(de l'application ouverte).* Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)$ une application surjective. Alors il existe un réel $c > 0$ tel que

$$T(\mathrm{B}_E(0,1)) \supset \mathrm{B}_F(0,c).$$

52. Corollaire *(théorème d'isomorphisme de Banach).* Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)$ une application bijective. Alors son inverse T^{-1} est continue.

53. Théorème *(du graphe fermé).* Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E,F)$ une application telle que son graphe soit fermé dans $E \times F$. Alors l'application T est continue.

3.2. Les espaces de Hilbert

54. Définition. Un *espace de Hilbert réel* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire ou hermitien $\langle\ ,\ \rangle$ telle que la norme $x \longmapsto \langle x, x\rangle^{1/2}$ le rende complet.

55. Exemple. L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ muni du produit scalaire

$$(f,g) \longmapsto \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert.

56. Théorème *(de projection sur un convexe fermé).* Soit H un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout vecteur $x \in H$, il existe un unique vecteur $p_C(x) \in C$ tel que

$$\mathrm{d}(x,C) = \|x - p_C(x)\|.$$

De plus, le point $p_C(x)$ est caractérisé par les conditions

$$p_C(x) \in C,$$
$$\forall z \in C, \qquad \operatorname{Re}\langle z - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leqslant 0.$$

57. Application *(moindres carrés).* On considère n points $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$ tels que les réels x_i ne soit pas tous égaux. Alors il existe des réels $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ qui rendent minimale la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2.$$

58. Théorème *(de représentation de Riesz).* Soient H un espace de Hilbert et $\varphi \in H'$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que

$$\forall x \in H, \qquad \varphi(x) = \langle x, u\rangle.$$

59. Proposition. Soient H un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(H)$ un endomorphisme continu. Alors il existe une unique application $u^* \colon H \longrightarrow H$ telle que

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

De plus, cette application u^* est linéaire et continue ; elle vérifie $(u^*)^* = u$.

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* 2e tirage. Masson, 1983.
[3] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[4] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques.* 2e édition. Ellipses, 2007.
[5] Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* Ellipses, 2017.
[6] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.