Leçon 209. Approximation de fonctions par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I. Approximation par des polynômes

I.1. Approximation locale

1. Théorème *(formule de Taylor-Lagrange)*. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ deux réels avec $a < b$ et $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

2. Exemple. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3. Théorème *(formule de Taylor-Young)*. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$ une fonction. Soit $a \in I$ un réel tel que la fonction f soit $n+1$ fois dérivable en ce point. Alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \to 0}(h^{n+1}).$$

4. Exemple. Lorsque $t \longrightarrow 0$, on trouve $\sin t = t + o(t^2)$ et $\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^2)$.

5. Théorème *(formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral)*. Soient E un espace de Banach et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a, b], E)$ une fonction. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(b-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

6. Application *(lemme d'Hadamard)*. Soient $k \in \mathbf{N}$ un entier et $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$\forall i \in [\![0, k]\!], \qquad f^{(i)}(0) = 0.$$

Alors il existe une fonction $g \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f(x) = x^k g(x).$$

I.2. Densité des polynômes dans les fonctions continues

7. Définition. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ un entier et $f \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Son *n-ième polynôme de Bernstein* est le polynôme

$$B_n f \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbf{C}[X].$$

8. Définition. Le module de continuité d'une fonction continue $f \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}$ est la fonction $\omega_f \colon \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par l'égalité

$$\omega_f(h) \coloneqq \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in [0, 1], \ |u - v| \leqslant h\}.$$

— DI —

9. Lemme. Soit $f \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Alors
   - lorsque $h \longrightarrow 0$, on a $\omega_f(h) \longrightarrow 0$;
   - pour tous réels $\lambda, t \geqslant 0$, on a $\omega_f(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1)\omega_f(t)$.

10. Théorème *(Bernstein)*. Soit $f \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Alors — DI —
   - la suite $(B_n f)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$;
   - plus précisément, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \|f - B_n f\|_\infty \leqslant C\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

11. Corollaire *(théorème de Weierstrass)*. Toute fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$ est une limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

12. Contre-exemple. Il est nécessaire que l'intervalle de définition soit fermé. En effet, sur $\mathbf{R}$, toute limite uniforme de fonctions polynomiales est encore une fonction polynomiale.

13. Application. Toute fonction continue $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_a^b t^n f(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

est identiquement nulle.

I.3. Interpolation polynomiale

14. Définition. Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ des réels deux à deux distincts et $i \in [\![0, n]\!]$ un entier. On pose

$$\ell_i \coloneqq \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbf{R}[X].$$

15. Remarque. Ces polynômes vérifient $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

16. Théorème. Soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors il existe un unique polynôme $p_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad p_n(x_i) = f(x_i).$$

Il s'agit du polynôme

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i.$$

17. Théorème. Soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable. Alors

$$\|f - p_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty \quad \text{avec} \quad \pi_{n+1} \coloneqq \prod_{j=0}^{n}(X - x_j) \in \mathbf{R}[X].$$

I.4. Les polynômes orthogonaux

18. Définition. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une *fonction poids* sur I est une fonction mesurable $\rho \colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_I |x|^n \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

L'ensemble $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\rho \, \mathrm{d}x$ est muni du produit scalaire définit par l'égalité $\langle f, g \rangle = \int_I f\overline{g}\rho$.

19. Remarque. Par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$,

il existe une unique famille étagée orthogonale de polynômes unitaires, appelés les *polynômes orthogonaux* associé au poids ρ.

D2

20. Théorème. Soit $\rho\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction poids et $\alpha > 0$ un réel vérifiant
$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$
Alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.

II. Convolution, approximation et régularisation

II.1. Produit de convolution

21. Définition. Le *produit de convolution* de fonctions boréliennes $f,g\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ est, lorsqu'elle est bien définie, la fonction $f\star g\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que
$$f\star g(x) \coloneqq \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x\in\mathbf{R}^d.$$
22. Exemple. La convolée $\mathbf{1}_{]-1,1[}\star\mathbf{1}_{]-1,1[}$ est une fonction triangle.
23. Remarque. Dès qu'une fonction $f\star g$ ou $g\star f$ est bien définie, l'autre l'est aussi et on a $f\star g = g\star f$.
24. Proposition. Soient $f,g\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fonctions. Alors
- si $f,g\in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, alors $f\star g\in\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$;
- si $f\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ et $g\in\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, alors $f\star g\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$;
- si la fonction f est bornée sur tout compact, alors la convolée $f\star g$ est définie.

25. Définition. Soit $f\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction borélienne. Notons Ω l'ensemble des ouverts sur lesquels la fonction f est nulle presque partout. Le *support* de la fonction f est l'ensemble
$$\operatorname{supp} f \coloneqq \Big(\bigcup_{\omega\in\Omega}\omega\Big)^{\mathrm{c}}.$$
26. Théorème. Soient $f\in\mathscr{C}^k(\mathbf{R}^d)$ une fonction et $g\in\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ une fonction à support compact. Alors la fonction $f\star g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et
$$\partial^\alpha(f\star g) = (\partial^\alpha f)\star g, \qquad a\in\mathbf{N}^n,\ |\alpha|\leqslant k.$$
27. Proposition. Soient $f,g\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fonctions boréliennes telles que leur convolée $f\star g$ soit bien définie. Alors
- $\operatorname{supp}(f\star g)\subset\overline{\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g}$;
- si le support de la fonction f est compact, alors $\operatorname{supp}(f\star g)\subset\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$;
- si les support des fonctions f et g sont compacts, alors celui de la convolée $f\star g$ l'est aussi.

II.2. Approximation de l'unité et régularisation

28. Définition. Une *approximation* de l'unité est une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ vérifiant les points suivants :
- les fonctions α_n sont positives et de masse 1 ;
- pour tout réel $\varepsilon > 1$, on a
$$\int_{\|x\|\geqslant\varepsilon}\alpha_n(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

29. Lemme. Soit $\rho_0\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par l'égalité
$$\rho_0(x) \coloneqq \begin{cases} \exp(-1/(1-\|x\|^2)) & \text{si } \|x\|<1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
On pose $\rho \coloneqq (\int_{\mathbf{R}^d}\rho_0)^{-1}\rho_0$. Alors la fonction ρ est positive, de masse 1 et elle vérifie
$$\operatorname{supp}\rho\subset\{x\in\mathbf{R}^d \mid \|x\|\leqslant 1\}.$$
30. Exemple. Les fonctions $\rho_n \coloneqq n^d\rho(n\cdot)$ constitue une approximation de l'unité.
31. Théorème. Soient $K\subset\mathbf{R}^d$ un compact et $\Omega\subset K$ un voisinage ouvert. Alors il existe une fonction $\theta\in\mathscr{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbf{R}^d)$ telle que
- $\theta = 1$ sur K ;
- $\theta = 0$ sur Ω^{c} ;
- $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

II.3. Applications : théorèmes de densités

32. Proposition. L'espace $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}^k(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{C}^k(\mathbf{R}^d)$. Pour tout $p\in[1,+\infty[$, l'espace $\mathrm{L}_{\mathrm{c}}^p(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.
33. Théorème. Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une approximation de l'unité.
- Soit $f\in\mathrm{L}_{\mathrm{c}}^p(\mathbf{R}^d)$ avec $p\in[1,+\infty[$. Alors la suite $(\rho_n\star f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans L^p vers la fonction f.
- Soit $f\in\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^n)$. Alors la suite $(\rho_n\star f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbf{R}^d$.

34. Corollaire. Pour tout $p\in[1,+\infty[$, l'espace $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.
35. Application *(lemme de Riemann-Lebesgue)*. Pour une fonction $f\in\mathrm{L}^1([a,b])$, on a
$$\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0.$$

III. Approximation des fonctions périodiques

III.1. Les coefficients de Fourier

36. Notation. On définit l'ensemble $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ des fonctions 2π-périodiques qui sont intégrables sur l'intervalle $]0,2\pi[$.
37. Définition. Soit $n\in\mathbf{Z}$. On définit la fonction $e_n\in\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ par l'égalité
$$e_n(x) = e^{int}, \qquad t\in\mathbf{R}.$$
Pour une fonction $f\in\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$, son *$n$-ième coefficient de Fourier* est le complexe
$$c_n(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$
38. Exemple. On a
$$c_n(\sin) = \begin{cases} \pm 1/2i & \text{si } n=\pm 1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

39. Définition. Pour une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$ et un entier $N \in \mathbf{N}^*$, on note

$$S_N(f) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \qquad \text{et} \qquad \sigma_N(f) \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f).$$

III.2. Noyaux de Fejér et de Dirichlet

40. Définition. Soit $N \in \mathbf{N}$. Le *noyau de Dirichlet* d'ordre N est la fonction

$$D_N \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} e_n.$$

41. Proposition. Le noyau de Dirichlet vérifie les points suivants.
- La fonction D_N est paire et $\int_0^{2\pi} D_N(t) \, \mathrm{d}t = 2\pi$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a
$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$
- Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$, on a $S_N(f) = f \star D_N$.
- On a $\|D_N\|_1 \longrightarrow +\infty$.

42. Définition. Si $N \neq 0$, le *noyau de Fejér* d'ordre N est la fonction

$$K_N \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n.$$

43. Proposition. Le noyau de Fejér vérifie les points suivants.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a
$$K_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.$$
- On a $\|K_N\|_1 = 1$.
- Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$, on a $f \star K_N = \sigma_N(f)$.

III.3. Théorèmes de Fejér et de Dirichlet

44. Théorème *(Fejér)*. Les deux points suivants constituent le théorème.
- Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \|\sigma_N(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$
et
$$\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$
- Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{T})$. Alors on la même conclusion avec la norme p.

45. Corollaire. Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$. Si $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $f = g$ presque partout.

46. Corollaire. La famille $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille totale de $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$. En particulier, la formule de Parseval s'applique.

47. Corollaire. Soient $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique et $x_0 \in \mathbf{R}$ un réel. Alors

$$S_N(f, x_0) \longrightarrow \ell \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad \ell = f(x_0).$$

48. Proposition. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique telle que la suite $(S_N(f))_{N \in \mathbf{N}}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. Alors

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n.$$

49. Proposition. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série $(S_N(f))_{N \in \mathbf{N}}$ converge normalement vers la fonction f.

50. Application. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'*équation de la chaleur* est le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x) & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que la fonction f est 1-périodique et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe une unique solution $u \colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ au problème (1) qui est 1-périodique par rapport à la variable d'espace.

51. Théorème *(Dirichlet)*. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que
- les limites $f^+ \coloneqq \lim_{t \longrightarrow 0^+} f(x_0 + t)$ et $f^- \coloneqq \lim_{t \longrightarrow 0^-} f(x_0 + t)$ existent ;
- il existe une constante $\delta > 0$ tel que
$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 \pm t) - f^\pm|}{t} \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Alors

$$S_N(f)(x_0) \longrightarrow \frac{1}{2}(f^+ + f^-).$$

52. Application. Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. La fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{T})$ définie par l'égalité

$$f(t) = e^{iat}, \qquad t \in [-\pi, \pi[$$

vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet au point π et on tire l'égalité

$$\pi \cot \pi a = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

[1] Marc Briane et Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuibert, 2012.
[2] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2006.
[3] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[4] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.