Leçon 213. Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1. Notation. On considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes.

1. Espaces de Hilbert et théorème de projection

1.1. Les espaces préhilbertiens

2. Définition. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Un *produit scalaire* sur l'espace E est une application $\langle\ ,\ \rangle \colon E \times E \longrightarrow \mathbf{K}$ vérifiant les points suivants :
- pour tout $y \in E$, l'application $\langle \cdot, y\rangle$ est linéaire ;
- pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
- pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x\rangle \in \mathbf{R}_+$;
- pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Le couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un *espace préhilbertien.*

3. Exemple. Les espaces vectoriels suivants sont préhilbertiens :
- $\mathbf{R}^n$ avec $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$;
- $\mathbf{C}^n$ avec $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$;
- $\mathrm{L}^2(I)$ avec $I \subset \mathbf{R}^d$ et $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{C})$ avec $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$.

4. Proposition *(inégalité de Cauchy-Schwarz).* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$ deux vecteurs. Alors
$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{1}$$

5. Corollaire. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors l'application
$$x \in E \longmapsto \|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2} \in \mathbf{R}_+$$
est une norme sur E. On l'appelle la norme issue du produit scalaire.

6. Proposition. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$ deux vecteurs. Alors l'inégalité (1) est une égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

7. Proposition *(inégalité du parallélogramme).* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$ deux vecteurs. Alors
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{2}$$

8. Remarque. Un espace vectoriel normé E vérifiant l'identité du parallélogramme (1) pour tous vecteurs $x, y \in E$ est préhilbertien.

9. Théorème *(Pythagore).* Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$ deux vecteurs orthogonaux. Alors
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

10. Définition. Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet pour la norme issue du produit scalaire.

11. Exemple. Les exemples du point3 sont tous des espaces de Hilbert.

12. Définition. Soit E un espace préhilbertien. L'*orthogonal* d'une partie $A \subset E$ est
$$A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}.$$

13. Proposition. Soient E un espace préhilbertien et $A \subset E$ une partie. Alors
- l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E ;
- on a $A^\perp = \overline{A}^\perp$ et $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

1.2. Théorème de projection et conséquence

14. Théorème *(de projection).* Soient E un espace de Hilbert et C une partie fermée non vide de E. Alors
- pour tout $x \in E$, il existe un unique point $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = \mathrm{d}(x, C)$;
- l'application $p_C \colon E \longrightarrow C$ est 1-lipschitzienne ;
- pour tout $x \in E$, le point $p_C(x)$ est caractérisé par les relations
$$p_C(x) \in C \qquad \text{et} \qquad \forall z \in C, \quad \operatorname{Re}\langle z - p_C(x), z - x\rangle \leqslant 0. \tag{3}$$

15. Remarque. Le théorème reste vrai pour un espace préhilbertien E et une partie convexe complète C.

16. Remarque. Lorsque la partie C est un sous-espace vectoriel fermé F, la caractérisation (3) par les angles obtus se reformule $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Cela permet de calculer, par exemple, la borne inférieure
$$\min_{a,b,c \in \mathbf{R}^3} \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c)^2\,\mathrm{d}x.$$

17. Contre-exemple. Toutes les hypothèses sont nécessaires.
- L'hypothèse hilbertienne est nécessaire : dans l'espace $(\mathscr{C}^0([0,1]), \|\ \|_\infty)$, la distance $\mathrm{d}(1, C)$ avec $C := \{f \in \mathscr{C}^0([0,1]) \mid 0 \leqslant f \leqslant 1, f(0) = 0\}$ est réalisée par les fonctions $1 - f$ avec $f \in C$.
- L'hypothèse de complétude est nécessaire. En prenant $E := \mathscr{C}^0([0,1]) \subset \mathrm{L}^2([0,1])$ avec $C := (\mathbf{1}_{[0,1/2]})^\perp$ et $C_1 := C \cap E$, la distance $\mathrm{d}(f_1, C_1)$ n'est pas atteinte pour toute fonction $f_1 \in E \setminus C_1$.
- L'hypothèse de convexité est nécessaire. Dans l'espace $\mathbf{R}^2$, l'origine admet une infinité de projetés sur la sphère unité $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$.

18. Application. Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ une sous-tribu. Pour une variable $X \in \mathrm{L}^2(\mathscr{F})$, on note $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] := p_{\mathrm{L}^2(\mathscr{G})}(X)$. Cette définition s'étend, par uniforme continuité, en une application $\mathbf{E}[\cdot \mid \mathscr{G}] \colon \mathrm{L}^1(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathscr{G})$.

19. Corollaire *(théorème du supplémentaire orthogonal).* Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors $E = F \oplus F^\perp$.

20. Contre-exemple. L'hypothèse de complétude est nécessaire. On pose
$$H := \mathscr{C}^0([-1,1]) \quad \text{et} \quad F := \{f \in H \mid f|_{[0,1]} = 0\}.$$
Alors $F^\perp = \{f \in H \mid f|_{[-1,0]} = 0\}$ et $F \oplus F^\perp \subset \{f \in H \mid f(0) = 0\} \neq H$.

21. Corollaire. Un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est nul.

22. Contre-exemple. Sans l'hypothèse de complétude, on peut reprendre le deuxième point du contre-exemple 17 : le sous-espace vectoriel fermé C_1 n'est pas dense alors que son orthogonal est nul.

23. Corollaire. Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\overline{F} = (F^{\perp})^{\perp}$.

24. Théorème. Soit E un espace de Hilbert. Alors l'application $y \in E \longmapsto \langle \cdot, y \rangle \in E'$ est une isométrie surjective. En particulier, toute forme $\phi \in E'$ s'écrit sous la forme

$$\forall x \in E, \quad \phi(x) = \langle x, y \rangle$$

pour un unique vecteur $y \in E$.

25. Application *(théorème faible de Radon-Nykodym)*. Soient $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable muni de deux mesures finies positives μ et ν telles que $\nu \leqslant \mu$. Alors il existe une fonction μ-presque partout positive $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \nu(a) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

26. Corollaire. Un espace de Hilbert est réflexif.

2. Bases hilbertiennes

27. Notation. On considère un espace de Hilbert H.

2.1. Des bases orthonormées totales

28. Définition. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de H est
- *orthogonale* si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$;
- *normée* si $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$;
- *totale* si le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(e_i)_{i \in I}$ est dense dans H.

Une *base hilbertienne* de H est une famille orthonormée totale de H.

29. Exemple. Voici des exemples de bases hilbertiennes.
- La base canonique de $\mathbf{R}^n$ en est une base hilbertienne.
- La famille $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $e_n = (\delta_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{K})$.
- L'espace $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ des fonctions 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ admet pour base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ avec $e_n(x) = e^{inx}$.

30. Remarque. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire des familles orthonormées de H.

2.2. Propriétés des bases hilbertienne, théorème de Bessel-Perseval

31. Proposition. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale finie de H et $x \in H$ un vecteur. Notons $F \coloneqq \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$. Alors

$$p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

32. Corollaire *(inégalité de Bessel)*. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H et $x \in H$ un vecteur. Alors

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

33. Théorème *(Perseval)*. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H. Alors les points suivants sont équivalents :
- la famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H ;
- pour tout $x \in H$, on a $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$;
- pour tous $x, y \in H$, on a $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$.

34. Exemple. Avec la fonction continue 2π-périodique $x \longmapsto 1 - x^2/\pi^2$, la formule de Perseval donne

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

35. Théorème. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de H et $x \in H$ un vecteur. Alors

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

36. Exemple *(théorème de Féjer-Cesàro)*. La famille $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $e_n(x) = e^{inx}$ est une base hilbertienne de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$. En particulier, toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ peut se décomposer sous la forme

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e_n \quad \text{avec} \quad c_n(f) \coloneqq \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x$$

où la convergence est au sens de la norme 2.

37. Corollaire. Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement s'il est isométrique à l'espace $\ell^2(\mathbf{N})$.

38. Théorème *(existence de base hilbertienne)*.
- Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.
- Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

2.3. Application : les polynômes orthogonaux

39. Définition. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une *fonction poids* sur I est une fonction mesurable $\rho \colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_I |x|^n \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

L'ensemble $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\rho \, \mathrm{d}x$ est muni du produit scalaire définit par l'égalité $\langle f, g \rangle = \int_I f \overline{g} \rho$. C'est un espace de Hilbert

40. Remarque. Par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$, il existe une unique famille étagée orthogonale de polynômes unitaires, les *polynômes orthogonaux*.

41. Théorème. Soit $\rho \colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction poids et $\alpha > 0$ un réel vérifiant

$$\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.

3. Dualité dans les espaces de Hilbert

3.1. Adjoint d'un opérateur

42. Définition-proposition. L'*adjoint* d'un opérateur $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(H)$ est l'unique application $T^* \colon H \longrightarrow H$ vérifiant

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

Cette dernière est linéaire continue.

D1

43. Exemple. En dimension fini, la matrice de l'adjoint est la transposée de la matrice de l'endomorphisme.
44. Exemple *(opérateurs à noyau)*. Soit $K \in \mathrm{L}^2([0,1] \times [0,1])$ une fonction. On définit l'opérateur continu

$$T_K \colon \mathrm{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathrm{L}^2([0,1])$$

de la manière suivante : pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ et presque tout $x \in [0,1]$, on pose

$$T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Alors $T_K^* = T_{K^*}$ avec $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$. L'opérateur T est autoadjoint si $K = K^*$.
45. Exemple. Un projecteur orthogonal est autoadjoint.
46. Remarque. Pour $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(H)$, les opérations $T \circ T^*$ et $T^* \circ T$ sont autoadjoints.
47. Proposition. L'application $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(H) \longmapsto T^* \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(H)$ est isométrie linéaire (ou antilinéaire) involutive et elle vérifie

$$\mathrm{Id}_H^* = \mathrm{Id}_H \qquad \text{et} \qquad (S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

48. Proposition. Soit $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(H)$ un opérateur. Alors

$$\|T\| = \|T^*\| \qquad \text{et} \qquad \|T \circ T^*\| = \|T^* \circ T\| = \|T\|^2.$$

49. Proposition. Soit $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(H)$ un opérateur. Alors

$$(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T} \qquad \text{et} \qquad H = \operatorname{Ker} T^* \oplus_\perp \overline{\operatorname{Im} u}.$$

3.2. Convergence faible et application

50. Définition. Soit H un espace de Hilbert. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de H *converge faiblement* vers un vecteur $x \in H$ si

$$\forall y \in H, \qquad \langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle.$$

Dans ce cas, un vecteur x vérifiant cette dernière relation est unique. On l'appelle la *limite faible* de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
51. Exemple. Dans l'espace $\ell^2(\mathbf{N})$, la suite $(e_n)_{k \in \mathbf{N}}$ avec $e_n \coloneqq (\delta_{n,k})_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers la suite nulle.
52. Remarque. La convergence forte implique la convergence faible. Mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple précédent.
53. Proposition. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de H qui converge faiblement vers un vecteur $x \in H$. Alors

$$\liminf_{n \to +\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|.$$

De plus, les points suivants sont équivalents :
- la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers le vecteur x ;
- $\limsup_{n \to +\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|$;
- $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$

54. Proposition *(compacité faible)*. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite bornée de H. Alors elle admet une sous-suite faiblement convergente.
D2
55. Théorème. Soit $J \colon H \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe, continue et coercive. Alors cette dernière atteint sa borne inférieure.

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[3] Francis Hirsch et Gilles Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 2009.