Leçon 214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

1. Le théorème d'inversion locale

1.1. Rappels sur les difféomorphismes

1. Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ un entier ou l'infini. Un $\mathscr{C}^k$*-difféomorphisme* entre deux ouverts $U \subset E$ et $V \subset F$ est une application bijective $f : U \longrightarrow V$ telle que cette dernière f et sa réciproque f^{-1} soient de classe $\mathscr{C}^k$.

2. Exemple. L'application $x \longmapsto x^2$ réalise un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de l'ouvert $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même. Lorsque les espaces E et F sont de Banach, tout isomorphisme continu de E dans F est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

3. Proposition. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts. Soit $f : U \longrightarrow V$ un homéomorphisme différentiable en un point $a \in U$. On suppose que la différentielle $df(a)$ est inversible. Alors l'application f^{-1} est différentiable au point a et
$$df(a)^{-1} = df^{-1}(f(a)).$$

4. Remarque. S'il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, alors $n = p$.

5. Remarque. Un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme est un homéomorphisme, mais la réciproque est fausse : la fonction $x \longrightarrow x^3$ est un homéomorphisme de la droite réelle, mais ce n'est pas un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, mais ce n'est pas un $\mathscr{C}^3$-difféomorphisme puisque sa réciproque $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

6. Proposition. On suppose que les espaces E et F sont de Banach. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts. Soit $f : U \longrightarrow V$ une application. Alors les points suivants sont équivalents :
- l'application f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme ;
- c'est un homéomorphisme et ses différentielles $df(a)$ avec $a \in U$ sont bijectives.

1.2. Le théorème et ses variantes

7. Théorème *(d'inversion locale)*. Soient E et F deux espaces de Banach et $\Omega \subset E$ un ouvert. Soient $f : \Omega \longrightarrow F$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \Omega$ un point. On suppose que la différentielle $df(a)$ est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert $U \subset \Omega$ du point a et un voisinage ouvert $V \subset F$ du point $f(a)$ tels que la restriction $f : U \longrightarrow V$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

8. Remarque. Lorsque les espaces E et F sont de dimension finie, il suffit de vérifier la condition $\det df(a) \neq 0$ pour appliquer le théorème.

9. Remarque. Le théorème existe aussi en version $\mathscr{C}^k$ avec $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

10. Exemple. L'application
$$\left|\begin{aligned} &\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \\ &\quad (r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}\right.$$
induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme
$$\mathbf{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right[\longrightarrow \mathbf{R}^2 \setminus [\mathbf{R}_-^* \times \{0\}].$$

11. Théorème *(d'inversion globale)*. Soient E et F deux espaces de Banach et $\Omega \subset E$ un ouvert. Soient $f : \Omega \longrightarrow F$ une application injective de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout point $x \in \Omega$, la différentielle $df(x)$ est inversible. Alors l'image $f(U)$ est un ouvert et la restriction $f : U \longrightarrow f(U)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

12. Contre-exemple. L'injectivité est nécessaire : l'application
$$\left|\begin{aligned} &\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \\ &\qquad (x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}\right.$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ et ses différentielles sont inversibles, mais ce n'est pas un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

13. Théorème *(Hadamard-Lévy)*. Soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Alors les points suivants sont équivalents :
- l'application f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme ;
- l'application f est *propre*, c'est-à-dire $f(x) \longrightarrow \infty$ lorsque $x \longrightarrow \infty$, et les différentielles $df(x)$ avec $x \in \mathbf{R}^n$ sont inversibles.

1.3. Deux applications du théorème

14. Lemme. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage $V \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ de la matrice A_0 et une application $\Phi : V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que
$$\forall A \in V, \qquad A = {}^{\mathrm{t}}\Phi(A) A_0 \Phi(A).$$

15. Théorème. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que
- l'origine est un point critique, c'est-à-dire $df(0) = 0$;
- la forme quadratique $d^2 f(0)$ n'est pas dégénérée ; D1
- elle est de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de 0 et un difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant
- $\varphi(0) = 0$;
- pour tout point $x \in U$, on a
$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$$
où les réels $\varphi_i(x)$ sont les coordonnées du vecteurs $\varphi(x)$.

16. Exemple. Pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on écrit $x - y = \varphi_1(x)^2 - \varphi_2(y)^2$ avec $\varphi_i(u) = \sqrt{u}$.

17. Application. Soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $df(0) = 0$ et la hessienne $d^2 f(0)$ soit définie positive. Alors le point 0 est un minimum local strict de l'application f.

D2

18. Lemme. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice à coefficients complexes. Alors le groupe topologique $\mathbf{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbf{C}[A]$.

19. Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice à coefficients complexes. Alors l'exponentielle matricielle complexe induit une surjection
$$\exp\colon \mathbf{C}[A] \longrightarrow \mathbf{C}[A]^\times.$$

20. Théorème. L'exponentielle matricielle complexe réalise un surjection
$$\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$

21. Contre-exemple. Le théorème est faux lorsqu'on se place sur le corps $\mathbf{R}$: la matrice $\operatorname{diag}(1,-1)$ n'est pas dans l'image de l'exponentielle.

22. Corollaire. L'image de l'exponentielle matricielle réelle est l'ensemble
$$\exp \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^{\times 2} := \{A^2 \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\}.$$

2. Le théorème des fonctions implicites

2.1. Le théorème

23. Théorème. Soient E, F et G trois espaces de Banach et $\Omega \subset E \times F$ un ouvert. Soient $(a,b) \in \Omega$ un point et $f\colon \Omega \longrightarrow G$ une application de classe $\mathscr{C}^k$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et la différentielle $\partial_y f(a,b)$ est bijective. Alors il existe
- un voisinage ouvert $U \subset E$ du point a ;
- un voisinage ouvert $V \subset F$ du point b ;
- une application $\varphi\colon U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^1$

tels que $U \times V \subset \Omega$ et, pour tout point $(x,y) \in U \times V$, on ait
$$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

24. Exemple. Considérons la fonction
$$f\colon (x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2 - 1 \in \mathbf{R}.$$
Si $y > 0$, alors on prend $(a,b) = (0,1)$ et on trouve
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x,y) = 0 \iff y := \varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$$

25. Proposition. On reprend les mêmes notations. Pour tout point $x \in U$, on a
$$d\varphi(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial b}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)).$$

26. Exemple. On reprend le même exemple. Si $x \in]-1,1[$, alors
$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}.$$

2.2. Quelques applications

27. Proposition *(équation de Burger)*. Soient $a, f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On considère l'équation
$$a(u(\cdot))\partial_x u + \partial_y u = 0,$$
$$u(x,0) = f(x).$$
Pour tout réel $x_0 \in \mathbf{R}$, il existe une fonction solution de l'équation sur un voisinage du point x_0.

28. Proposition. Soit $P_0 \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$ un polynôme et $x_0 \in \mathbf{R}$ une des ses racines simples. Alors il existe un voisinage $U \subset \mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$ du polynôme P_0, un voisinage $V \subset \mathbf{R}$ du réel x_0 et une application $\varphi\colon U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que
$$\forall P \in U,\ \forall x \in V, \qquad x = \varphi(P) \iff P(x) = 0.$$

29. Corollaire. L'ensemble des polynômes scindés simples de degré n est un ouvert de l'espace $\mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$.

3. Introduction à la géométrie différentielle

3.1. Notion de sous-variété et formulations équivalentes

30. Définition. Soit $d \in \mathbf{N}$ un entier. Une partie $M \subset \mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d en un point $a \in M$ s'il existe
- un voisinage $U \subset \mathbf{R}^n$ du point a ;
- un voisinage $V \subset \mathbf{R}^n$ de l'origine ;
- un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi\colon U \longrightarrow V$

tels que
$$\varphi(M \cap U) = [\mathbf{R}^d \times \{0\}] \cap \varphi(U).$$
La partie M est une sous-variété si elle l'est en tout point de M.

31. Exemple. La parabole d'équation $y = x^2$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^2$.

32. Théorème. Soient $M \subset \mathbf{R}^n$ une partie, $d \in \mathbf{N}$ un entier et $a \in M$ un point. Alors les points suivants sont équivalents :
- la partie V est une sous-variété de dimension d au point a ;
- il existe un voisinage $U \subset \mathbf{R}^n$ du point a et une fonction $F\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que
$$M \cap U = F^{-1}(\{0\}).$$
et les différentielles $df_i(a)$ soient indépendantes ;
- il existe un voisinage $U \subset \mathbf{R}^n$ du point a, une application $u\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que
$$M \cap U = \{A(z, u(z)) \mid z \in \mathbf{R}^d\} \cap U \ ;$$
- il existe un voisinage $U \subset \mathbf{R}^n$ du point a, un voisinage $V \subset \mathbf{R}^d$ de l'origine et une application $j\colon V \longrightarrow U$ tels que $j(0) = a$, la différentielle $dj(0)$ soit injective et la restriction $j\colon V \longrightarrow M \cap U$ soit un homéomorphisme.

33. Exemple. La sphère de $\mathbf{R}^{n+1}$ est une sous-variété de dimension n. Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{n^2}$ est une sous-variété de dimension $n-1$.

3.2. L'espace tangent

34. Définition. Un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ est *tangent* à une partie $M \subset \mathbf{R}^n$ en un point $a \in M$ s'il existe un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ contenant zéro et une fonction dérivable $\gamma\colon I \longrightarrow M$ telle que
$$\gamma(0) = a \qquad \text{et} \qquad \gamma'(0) = v.$$
On note $\mathrm{T}_a M \subset \mathbf{R}^n$ l'ensemble des vecteurs tangentes à la partie M au point a.

35. Théorème. Soient $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété de dimension d en un point $a \in M$. Alors l'ensemble $\mathrm{T}_a M$ est un sous-espace vectoriel de dimension d.

36. Théorème. En reprenant les notations du théorème 32, on a
- $\mathrm{T}_a M = d\varphi(a)^{-1}(\mathbf{R}^d \times \{0\})$;
- $\mathrm{T}_a M = \operatorname{Ker} dF(a)$;
- $\mathrm{T}_a M = \Gamma(dg(a_1, \dots, a_d))$ en notant $a = (a_1, \dots, a_n)$;
- $\mathrm{T}_a M = \operatorname{Im} dj(0)$

37. Exemple. Pour un point $a \in \mathbf{R}^{n+1}$ de la sphère unité $\mathbf{S}^n$, on a $\mathrm{T}_a \mathbf{S}^n = a^\perp$.

3.3. Le théorème des extrema liés

38. Lemme. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$ des formes linéaires indépendantes et $f \in E^*$ une forme linéaire. Alors
$$f \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} \varphi_i \subset \operatorname{Ker} f.$$
39. Corollaire. Deux formes linéaires non nulles sont de même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

40. Théorème *(des extrema liés)*. Soient $g_1, \dots, g_m \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On considère l'ensemble
$$C \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}.$$
Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert avec $C \subset \Omega$. Soit $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que
- la fonction $f|_C$ admet un extremum local en un point $x^\star \in \Omega$,
- la fonction f est différentiable en ce point $x^\star$,
- la famille $(dg_1(x^\star), \dots, dg_m(x^\star))$ est libre.

Alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ tels que
$$df(x^\star) = \lambda_1 \, dg_1(x^\star) + \dots + \lambda_m \, dg_m(x^\star). \tag{($*$)}$$
41. Remarque. La condition $(*)$ implique que la différentielle $df(x^\star)$ est nulle sur l'espace tangent $\mathrm{T}_{x^\star} C$, c'est-à-dire
$$\mathrm{T}_{x^\star} C \subset \operatorname{Ker} df(x^\star).$$
42. Contre-exemple. L'hypothèse d'indépendance est nécessaire. Le minimum de la fonction $x + y^2$ sous la contrainte $x^3 - y^2$ se situe au point $(0, 0)$. Pourtant, la différentielle de la fonction $x^3 - y^2$ en ce point est nulle : la relation $(*)$ n'est pas vraie.

43. Application *(théorème spectral)*. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. L'application $x \in E \longmapsto \langle u(x), x \rangle$ admet un maximum sur la sphère unité $S \subset E$ en un point $e_1 \in S$. Le théorème des extrema liés nous donne ensuite un réel $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. En raisonnant par récurrence, l'endomorphisme u est diagonalisable en base orthonormée.

44. Application *(inégalité arithmético-géométrique)*. En optimisant la fonction $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = s$ avec $x_i, s > 0$, on obtient
$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[3] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques.* 2e édition. Ellipses, 2007.
[4] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Quatrième édition. Cassini, 2015.
[5] Maxime Zavidovique. *Un Max de Math.* Calvage & Mounet, 2013.