Leçon 215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

1. Notation. Dans toute cette leçon, on considère deux entiers $n, p \geqslant 1$. On munit les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ de normes quelconques.

1. Différentielle et dérivées partielles

1.1. Fonctions différentiables

2. Définition. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Une fonction $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est *différentiable* en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \qquad \text{lorsque } h \longrightarrow 0. \tag{$*$}$$

3. Proposition. On reprend les mêmes notations. Si elle existe, alors l'application linéaire L vérifiant la condition $(*)$ est unique et cette dernière est notée sous la forme $df(a) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

4. Définition. Une fonction $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est différentiable sur l'ouvert U si elle l'est en tout point $a \in U$. Elle est *de classe $\mathscr{C}^1$* si elle est différentiable et si l'application

$$df\colon \left| \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p), \\ x \longmapsto df(x) \end{array} \right.$$

est continue.

5. Remarque. Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

6. Remarque. La différentielle se comporte bien avec la somme et la multiplication par un réel, c'est-à-dire

$$d(f+g) = df + dg \qquad \text{et} \qquad d(\lambda f) = \lambda\, df.$$

7. Théorème. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^p$ deux ouverts. Soient $f\colon U \longrightarrow V$ et $g\colon V \longrightarrow \mathbf{R}^q$ deux applications différentiables en des points respectifs $a \in U$ et $f(a)$. Alors la composée $g \circ f$ est différentiable au point a et

$$d(g \circ f)(a)(h) = dg(f(a))(df(a)(h)), \qquad h \in \mathbf{R}^n.$$

8. Corollaire. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^p$ deux ouverts. Soit $f\colon U \longrightarrow V$ une bijection. On suppose que la fonction f est différentiable en un point $a \in U$ et que la fonction f^{-1} l'est au point $f(a)$. Alors la différentielle $df(a)$ est un isomorphisme et

$$df^{-1}(f(a)) = df(a)^{-1}.$$

9. Exemple. Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction différentiable. Soient $a, b \in U$ deux points tels que $[a, b] \subset U$. Alors la fonction

$$\varphi\colon \left| \begin{array}{r} [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^p, \\ t \longmapsto f(a + t(b-a)) \end{array} \right.$$

est dérivable et

$$\varphi'(t) = df(a + t(b-a))(b-a), \qquad t \in [0,1].$$

1.2. Exemples fondamentaux

10. Exemple. Une application linéaire $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^n$ et

$$df(a)(h) = f(h), \qquad a, h \in \mathbf{R}^n.$$

11. Remarque. Soit $I \subset \mathbf{R}^n$ un intervalle. Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable si et seulement si elle est différentiable. Dans ce cas, on peut écrire

$$df(a)(h) = f'(a)h, \qquad a \in I,\ h \in \mathbf{R}.$$

12. Proposition. Soient $B\colon \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une application bilinéaire. Alors elle est différentiable et

$$dB(a,b)(h,k) = B(a,k) + B(h,b), \qquad (a,b),(h,k) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n.$$

13. Exemple. La fonction $f\colon (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longmapsto AB$ est différentiable et

$$df(A,B)(H,K) = AK + HB, \qquad A, B, H, K \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

14. Application. La fonction $\det\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est différentiable et

$$d\det(A)(H) = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}(\operatorname{Com} A)H), \qquad A, H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

15. Proposition. La fonction $f\colon A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \longmapsto A^{-1}$ est différentiable et

$$df(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}, \qquad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}),\ H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

16. Proposition. La fonction $\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est différentiable et

$$d\exp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{p-1} X^j H X^{p-1-j}, \qquad A, H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

1.3. Dérivées partielles, dérivées directionnelles et matrice jacobienne

17. Définition. Pour une fonction $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$, sa *dérivée directionnelle* par rapport à un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ en un point $a \in U$ est, lorsqu'elle existe, la quantité

$$\mathrm{D}_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{h}.$$

18. Définition. Soient $i \in [\![1, n]\!]$ un indice et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Pour une fonction $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$, sa *dérivée partielle* par rapport à la i-ième coordonnée en un point $a \in U$ est, lorsqu'elle existe, la quantité $\partial_i f(a) \coloneqq \mathrm{D}_{\varepsilon_i} f(a)$.

19. Exemple. Avec $f(x,y) = xy + y^2$, on a $\partial_y f(x,y) = x + 2y$.

20. Théorème. Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction différentiable en un point $a \in U$. Alors elle admet des dérivées partielles $\partial_i f(a)$ avec $i \in [\![1, n]\!]$ au point a et, pour tout vecteur $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$, on a

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i.$$

21. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la fonction

$$(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en l'origine bien qu'elle n'y soit même pas continue.

22. Corollaire. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^p$ deux ouverts. Soit $a \in U$ un point. Soient $f\colon U \longrightarrow V$ et $g\colon V \longrightarrow \mathbf{R}^q$ deux applications respectivement différentiables

aux points a et $f(a)$. Alors

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial y_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(a)) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a).$$

23. DÉFINITION. Soit $f \colon U \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction différentiable en un point $a \in U$. Sa *matrice jacobienne* au point a est la matrice, notée $\mathrm{J}f(a)$, de l'application linéaire $df(a)$ dans les bases canoniques. Il s'agit de la matrice

$$\mathrm{J}f(a) = (\partial_i f_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R}).$$

Lorsque $p = 1$, son *gradient* au point a est le vecteur

$$\nabla f(a) \coloneqq (\partial_i f(a), \dots, \partial_n f(a)) \in \mathbf{R}^n.$$

24. EXEMPLE. En reprenant l'exemple précédent, on a $\nabla f(x, y) = (y, x + 2y)$.

1.4. Inégalités des accroissements finis et applications

25. THÉORÈME *(inégalité des accroissements finis).* Soit $f \colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction différentiable. Soit $[a, b] \subset U$ un segment. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|||df(x)||| \leqslant M$ pour $x \in [a, b]$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M \|b - a\|$.

26. REMARQUE. Le théorème s'applique lorsque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

27. COROLLAIRE. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert connexe et $f \colon U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction différentiable. Alors elle est constante si et seulement si

$$\forall x \in U, \qquad df(x) = 0.$$

28. COROLLAIRE. Une fonction $U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles existes et sont continues.

2. Les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

2.1. Les difféomorphismes

29. DÉFINITION. Un $\mathscr{C}^1$*-difféomorphisme* entre deux ouverts $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^p$ est une application bijective $f \colon U \longrightarrow V$ telle que cette dernière f et sa réciproque f^{-1} soient de classe $\mathscr{C}^1$.

30. EXEMPLE. L'application $x \longmapsto x^2$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$.

31. PROPOSITION. Soit $f \colon U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Alors pour tout point $x \in U$, la différentielle $df(x)$ est un isomorphisme.

32. COROLLAIRE. S'il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, alors $n = p$.

33. REMARQUE. Un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme est un homéomorphisme, mais la réciproque est fausse : la fonction $x \longrightarrow x^3$ est un homéomorphisme de la droite réelle, mais ce n'est pas un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, mais ce n'est pas un $\mathscr{C}^3$-difféomorphisme puisque sa réciproque $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

34. PROPOSITION. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^p$ deux ouverts. Soit $f \colon U \longrightarrow V$ une application. Alors les points suivants sont équivalents :

- l'application f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme ;
- c'est un homéomorphisme et ses différentielles $df(a)$ avec $a \in U$ sont bijectives.

2.2. Le théorème d'inversion locale

35. THÉORÈME *(d'inversion locale).* Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \Omega$ un point. On suppose que la différentielle $df(a)$ est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage ouvert $U \subset \Omega$ du point a et un voisinage ouvert $V \subset \mathbf{R}^p$ du point $f(a)$ tels que la restriction $f \colon U \longrightarrow V$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

36. REMARQUE. L'hypothèse du théorème revient à supposer que $\det df(a) \neq 0$.

37. EXEMPLE. L'application

$$\left| \begin{aligned} &\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \\ &\quad (r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned} \right.$$

induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

$$\mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbf{R}^2 \setminus [\mathbf{R}_-^* \times \{0\}].$$

38. APPLICATION. On peut trouver un voisinage $U \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de la matrice nulle (respectivement I_n) et un voisinage $V \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de la matrice I_n (respectivement eI_n) tels que la restriction $\exp \colon U \longrightarrow V$ soit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

39. COROLLAIRE. La fonction $\exp \colon \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective.

40. THÉORÈME *(d'inversion globale).* Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une application injective de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout point $x \in \Omega$, la différentielle $df(x)$ est un isomorphisme. Alors l'image $f(\Omega)$ est un ouvert et la restriction $f \colon \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

41. CONTRE-EXEMPLE. L'injectivité est nécessaire : l'application

$$\left| \begin{aligned} &\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \\ &\quad (x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ de différentielles inversibles, mais ce n'est pas un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

2.3. Le théorème des fonctions implicites

42. THÉORÈME. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ un ouvert, $(a, b) \in \Omega$ un point et $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que

$$f(a, b) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_y f(a, b) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

Alors il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ du point a, un voisinage ouvert $V \subset \mathbf{R}^p$ du point b et une application $\varphi \colon U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que $U \times V \subset \Omega$ et

$$\forall (x, y) \in U \times V, \qquad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

De plus, pour tout point $x \in U$, on a

$$d\varphi(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial b}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

43. EXEMPLE. Considérons la fonction

$$f \colon (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2 - 1 \in \mathbf{R}.$$

Si $y > 0$, alors on prend $(a, b) = (0, 1)$ et on trouve

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad f(x, y) = 0 \iff y \coloneqq \varphi(x) \coloneqq \sqrt{1 - x^2}$$

De plus, si $x \in]-1, 1[$, alors $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$.

3. Les différentielles d'ordre supérieur

3.1. La différentielle seconde

44. Définition. Une fonction $f : U \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est *deux fois différentiables* si l'application $df : U \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ est différentiable. Dans ce cas, pour tout point $x \in U$, la différentielle $d(df)(a)$ est un élément de l'espace $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p))$ et on notera

$$d^2 f(a)(h,k) \coloneqq d(df)(a)(h)(k), \qquad h,k \in \mathbf{R}^n$$

de sorte que l'application $d^2 f(a) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ soit bilinéaire. Elle est *de classe* $\mathscr{C}^2$ si sa *différentielle seconde* $d^2 f$ est continue.

45. Théorème. Une fonction $U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est de classe $\mathscr{C}^2$ si et seulement si ses dérivées partielles secondes existent et sont continues.

46. Remarque. On peut généraliser cette définition et ce théorème en introduisant la notion de différentielle k-ième $d^k f$ et celle de classe $\mathscr{C}^k$.

47. Théorème *(formule de Taylor avec reste intégral)*. Soit $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une application de classe $\mathscr{C}^{k+1}$. Soient $a, h \in \mathbf{R}^n$ deux points tels que $[a, a+h] \subset U$. Alors

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \cdots + \frac{1}{k!} d^2 f(a)(h, \ldots, h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h, \ldots, h)\, dt.$$

48. Théorème *(Schwarz)*. Soit $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ deux indices. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

49. Définition. Soit $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Sa *matrice hessienne* en un point $a \in U$ est la matrice, notée $\mathrm{H}f(a)$, de la forme quadratique $d^2 f$ dans la base canonique. Il s'agit de la matrice

$$\mathrm{H}f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

50. Exemple. La hessienne de la fonction $f(x,y) = xy + y^2$ est la matrice

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

51. Lemme. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage $V \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ de la matrice A_0 et une application $\Phi : V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^{\mathrm{t}}\Phi(A) A_0 \Phi(A).$$

52. Théorème *(lemme de Morse)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que

- l'origine est un point critique, c'est-à-dire $df(0) = 0$;
- la forme quadratique $d^2 f(0)$ n'est pas dégénérée ;
- elle est de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe des voisinages $U, V \subset \mathbf{R}^n$ de l'origine et un difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

- $\varphi(0) = 0$;
- pour tout point $x \in U$, on a
$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$$
où les réels $\varphi_i(x)$ sont les coordonnées du vecteurs $\varphi(x)$.

3.2. Application à l'optimisation

53. Hypothèse. On considère une fonction $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$.

54. Proposition. Soit $x^\star \in U$ un point. On suppose que la fonction f admet un minimum et est différentiable en ce point $x^\star$. Alors $df(x^\star) = 0$.

55. Contre-exemple. La condition est loin d'être nécessaire puisque la fonction cube $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^3$ voit sa dérivée s'annuler au point $x^\star = 0$ et, pourtant, ce point n'est pas un minimum.

56. Proposition. Soient $C \subset E$ un convexe ouvert et $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe différentiable. Alors tout point critique de f en est un minimum global.

57. Application. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. L'unique minimum de l'application

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \quad x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \end{array}\right.$$

est atteint au point $x^\star \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $Ax^\star = b$.

58. Proposition *(point de Fermat)*. Soient A, B et C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbf{R}^2$. On suppose que les trois angles du triangle ABC sont strictement inférieurs à $2\pi/3$. Alors la fonction

$$f : \left|\begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \ M \longmapsto MA + MB + MC \end{array}\right.$$

admet un unique point minimum qui est dans l'intérieur strict du triangle ABC.

59. Proposition. Soit $x^\star \in U$ un point. On suppose que la fonction f est deux fois différentiable en ce point $x^\star$.

- Si le point $x^\star$ en est un minimum local, alors $df(x^\star) = 0$ et sa différentielle seconde $d^2 f(x^\star)$ est une forme quadratique positive, c'est-à-dire
$$d^2 f(x^\star)(h,h) \geqslant 0, \qquad \forall h \in E.$$
- Si $df(x^\star) = 0$ et sa différentielle seconde $d^2 f(x^\star)$ est définie positive, alors le point $x^\star$ est un minimum local strict de la fonction f.

60. Contre-exemple. Les réciproques des deux points sont fausses. Pour le premier point, la fonction $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 - y^3$ admet un unique point critique qui est l'origine et, en ce point, sa hessienne est positive, mais l'origine n'est pas un minimum local. On considère le contre-exemple $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 + y^4$ pour le second point.

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[3] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Quatrième édition. Cassini, 2015.