Leçon 220. Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2.

1. Notation. Dans cette leçon, on considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes.

1. Théorie des équations différentielles

1.1. Premières définitions et formulation intégrale

2. Définition. Soient $N, n \geqslant 1$ deux entiers non nuls et $\Omega \subset \mathbf{R} \times (\mathbf{K}^N)^n$ un ouvert. Une *équation différentielle* d'ordre n est une équation de la forme

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

pour une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^N$ où l'inconnue est une fonction y de la variable réelle. Lorsque $N = 1$, on parlera d'une équation différentielle *scalaire*

3. Définition. Une *solution* de l'équation (1) est la donnée d'un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et d'une fonction n fois dérivables $y\colon I \longrightarrow \mathbf{K}^N$ telle que

- pour tout $t \in I$, on ait $(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega$;
- pour tout $t \in I$, on ait $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$.

4. Exemple. L'expression $y' = 2y$ est une équation différentielle d'ordre 1 dont une solution est donnée par le couple $(\mathbf{R}, y)$ avec $y(t) = e^{2t}$ pour $t \in \mathbf{R}$.

5. Notation. Dans la suite, on suppose $n = 1$ depuis qu'une équation différentielle en dimension N et d'ordre n peut être vue comme une équation différentielle en dimension 1 et d'ordre nN.

6. Définition. Un *problème de Cauchy* est la donnée d'une équation différentielle (1) pour laquelle on cherche une solution $y\colon I \longrightarrow \mathbf{K}^N$ vérifiant $y(t_0) = y_0$ pour une quantité fixée $(t_0, y_0) \in \Omega$. Ce problème est noté

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

7. Définition. Lorsque $\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{K}^N$, l'équation (1) est *linéaire* si la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f(t, y) = A(t)y + B(t), \qquad t \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{K}^N$$

pour deux fonctions $A\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_N(\mathbf{K})$ et $B\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}^N$.

8. Proposition. On suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω. Alors toute solution $y\colon I \longrightarrow \mathbf{K}^N$ de l'équation (1) est de classe $\mathscr{C}^{k+2}$.

9. Proposition. Soient $(t_0, y_0) \in \Omega$ une condition initiale et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^N$ une fonction continue. Alors une fonction $y\colon I \longrightarrow \mathbf{K}^N$ est solution du problème (2) si et seulement si

- elle est continue ;
- pour tout $t \in I$, on a $(t, y(t)) \in \Omega$;
- pour tout $t \in I$, on a

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$

1.2. Solutions maximales et globales

10. Définition. Une certaine solution $y_1\colon I_1 \longrightarrow \mathbf{K}^N$ de l'équation (1) *prolonge* une autre solution $y_2\colon I_2 \longrightarrow \mathbf{K}^N$ si

$$I_1 \subset I_2 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in I_1,\ y_1(t) = y_2(t).$$

Elle la *prolonge strictement* si, en outre, on a $I_1 \neq I_2$.

11. Exemple. Considérant l'équation $y' = y$, la solution $y\colon t \in \,]1, 3[\, \longmapsto e^t$ prolonge strictement la solution $y\colon t \in \,]1, 2[\, \longmapsto e^t$.

12. Remarque. Une solution peut admettre des prolongements définis sur un même intervalle qui sont distincts.

13. Définition. Une solution de l'équation (1) est *maximale* si elle n'admet pas de prolongement strict.

14. Définition. Lorsque $\Omega = I \times \Omega'$ pour un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et un ouvert $\Omega' \subset \mathbf{K}^N$, une solution de l'équation (1) est *globale* si elle est définie sur l'intervalle I.

15. Exemple. La solution $t \in \mathbf{R} \longmapsto e^t$ est une solution globale de l'équation $y' = y$.

16. Proposition. Une solution globale est maximale.

17. Contre-exemple. La réciproque est fausse : si $y_0 > 0$, l'équation $y' = y^2$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$ admet comme solution la fonction

$$t \in \,]-\infty, 1/y_0[\, \longmapsto \frac{y_0}{1 - y_0 t}$$

est une solution qui ne peut pas être prolonger au point $1/y_0$.

1.3. Théorèmes d'existence et d'unicité

18. Théorème *(lemme de Grönwall)*. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$ et $a \in \mathbf{R}$ deux réels. Soient $u, v\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ deux fonctions continues. On suppose que

$$\forall t \in I, \qquad u(t) \leqslant a + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)\,\mathrm{d}s \right|.$$

Alors

$$\forall t \in I, \qquad u(t) \leqslant a \exp\left(\left| \int_{t_0}^t v(s)\,\mathrm{d}s \right| \right).$$

19. Définition. Une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^N$ est *localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état* y si, pour tout point $(\tilde{t}, \tilde{y}) \in \Omega$, il en existe un voisinage $V \subset \Omega$ et une constante $k \geqslant 0$ tels que

$$\forall (t, y_1), (t', y_2) \in V, \qquad t = t' \quad \Longrightarrow \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant k \|y_1 - y_2\|.$$

20. Remarque. Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors elle est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.

21. Théorème *(Cauchy-Lipschitz local)*. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^N$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soient $(t_0, y_0) \in \Omega$ une condition initiale. Alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que le problème (2) admette une unique solution définie sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. D1

22. COROLLAIRE *(Cauchy-Lipschitz global)*. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^N$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soient $(t_0, y_0) \in \Omega$ une condition initiale. Alors la problème (2) une unique solution maximale définie sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. De plus, cet intervalle I est ouvert.

23. CONTRE-EXEMPLE. L'équation $y' = 3y^{2/3}$ admet les fonctions $y(t) = t^3$ et $y(t) = 0$ comme solutions maximales.

1.4. Recherche des solutions globales

24. THÉORÈME *(de sortie de tout compact)*. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^N$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $y\colon]c, d[\longrightarrow \mathbf{K}^N$ une solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage $V \subset]c, d[$ du réel d tel que

$$\forall t \in V, \qquad (t, y(t)) \notin K.$$

25. EXEMPLE. Considérant l'équation $y' = y^2$, la fonction définie par la relation

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad t > 1$$

est une solution maximale sur $]1, +\infty[$ et vérifie $y(t) \longrightarrow +\infty$ lorsque $t \longrightarrow 1$.

26. COROLLAIRE *(théorème des bouts)*. On suppose $\Omega =]a, b[\times \mathbf{K}^N$. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^N$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $y\colon]c, d[\longrightarrow \mathbf{K}^N$ une solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$. Si $d < b$, alors

$$\|y(t)\| \longrightarrow +\infty \qquad \text{lorsque} \qquad t \longrightarrow d.$$

27. APPLICATION. Soit $f\colon]a, b[\times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N$ une fonction continue, bornée et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Alors toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est globale.

28. EXEMPLE. L'équation $y' = \sin y$ avec la condition initiale $y(1) = 1$ admet une unique solution maximale qui se trouve être globale.

2. Méthodes de résolutions dans le cas linéaire

2.1. Le cas linéaire

29. HYPOTHÈSE. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. Soient $A\colon I \longrightarrow \mathscr{M}_N(\mathbf{K})$ et $B\colon I \longrightarrow \mathbf{K}^N$ deux fonctions continues. Notons S l'ensemble des solutions maximales de l'équation

$$y' = A(t)y + B(t) \tag{3}$$

et S_{H} celui de l'équation

$$y' = A(t)y. \tag{4}$$

30. PROPOSITION. L'ensemble S_{H} est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(I, \mathbf{K}^N)$ et il est de dimension N.

31. COROLLAIRE. L'ensemble S est un espace affine de direction S_{H}.

32. DÉFINITION. Une *matrice fondamentale* de l'équation (4) est une matrice de la forme $(y_1 \quad \cdots \quad y_N)$ pour une base $(y_1, \dots, y_N)$ de l'espace S_{H}.

33. EXEMPLE. Une matrice fondamentale de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ est donnée par l'égalité

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix}.$$

34. THÉORÈME. Soit Φ une matrice fondamentale du système (4). Alors ses solutions s'écrivent sous la forme

$$y(t) = \Phi(t)C, \qquad t \in I$$

pour un vecteur $C \in \mathbf{K}^N$.

35. REMARQUE *(méthode de variation de la constante)*. Une fois une matrice fondamentale Φ de l'équation (4) obtenue, on cherche les solutions de l'équation (3) sous la forme $t \longmapsto \Phi(t)C(t)$.

36. EXEMPLE. En dimension 1, les solutions de l'équation $y' = 2y + 1$ sont de la forme

$$y(t) = Ce^{2t} - 1/2, \qquad t \in I$$

pour une constante $C \in \mathbf{K}$.

37. REMARQUE. Lorsque $N = 1$, on peut chercher les solutions sont la forme de série entière en exhibant des relations entre ces coefficients à l'aide de l'équation différentielle.

38. EXEMPLE. L'équation

$$(t^2 + t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$$

admet comme solution la série entière

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \frac{a_0}{1+t}, \qquad t \in]-1, 1[$$

qui se prolonge à l'intervalle $]-1, +\infty[$.

2.2. Systèmes différentiels à coefficients constants

39. HYPOTHÈSE. Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbf{K})$ une matrice. On étudie le système différentielle

$$y' = Ay. \tag{5}$$

40. PROPOSITION. Une matrice fondamentale du système (5) est donnée par la fonction

$$t \in \mathbf{R} \longmapsto \exp(tA).$$

41. COROLLAIRE. Soient $a, b \in \mathbf{C}$ deux réels. Considérons le polynôme $P \coloneqq X^2 + aX + b$ et l'équation différentielle $y'' + ay' + b = 0$.

- Si le polynôme P admet deux racines complexes r et s, alors les solutions sont de la forme $y(t) = \lambda e^{rt} + \mu e^{st}$ pour deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.
- Si le polynôme P admet une racine complexe double r, alors elles sont de la forme $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}$ pour deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.

42. EXEMPLE. Avec la méthode de la variation de la constante, la solution du problème

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t, \\ y(-1) = 0, \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$$

s'écrit

$$y(t) = (t^2/2 + t(e+1) + e + 1/2)e^t.$$

3. Études numériques et qualitative

3.1. Une méthode numérique

43. DÉFINITION. Soient $t_0, T, H > 0$ trois réels positifs Une *méthode numérique à un pas* est la donnée d'une fonction $\Phi \colon [t_0, t_0 + T] \times \mathbf{R}^d \times [0, H] \longrightarrow \mathbf{R}^d$. Cette dernière définie une suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par la relation

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \qquad \text{et} \qquad y_0 = y_{0,N}.$$

pour des réels $t_0, \dots, t_N, h_0, \dots, y_N > 0$. Son *pas maximal* est

$$h_{\max} \coloneqq \max(h_0, \dots, h_N).$$

44. EXEMPLE. La *méthode d'Euler explicite* est donnée par la fonction

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y)$$

pour résoudre une équation $y' = f(t, y)$.

45. DÉFINITION. Une méthode Φ est *convergente* si, pour toutes suites $(y_{n,N})_{n \in [\![0,N]\!]}$ définie par la méthode à N pas avec $N \geqslant 1$, on a

$$\max_{n \in [\![0,N]\!]} \|y(t_{n,N}) - y_{n,N}\| \longrightarrow 0$$

lorsque $y_{0,N} \longrightarrow y(t_0)$ et $h_{\max,N} \longrightarrow 0$.

46. THÉORÈME. La méthode d'Euler explicite est convergente.

3.2. Intégrales premières et étude qualitative d'un système

47. HYPOTHÈSE. On considère les système autonome, c'est-à-dire les équations différentielles de la forme

$$y' = f(y) \tag{6}$$

pour une fonction $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^N$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$.

48. DÉFINITION. Une *intégrale première* du système (6) est une fonction $E \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour toute solution $y \colon I \longrightarrow \mathbf{R}^N$ de l'équation (6), on ait

$$\forall t \in I, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[E(y(t))] = 0.$$

49. EXEMPLE. Une intégrale première du système

$$\begin{cases} x' = 2x^2(x-y) - 2y, \\ y' = 2x(x-y)(2x-y) \end{cases}$$

est la fonction donnée par la relation

$$E(x, y) = x^2(x-y)^2 + y^2.$$

50. DÉFINITION. La *trajectoire* d'une solution $y \colon I \longrightarrow \mathbf{R}^N$ du système (6) est l'ensemble

$$\{(t, y(t)) \mid t \in I\} \subset I \times \mathbf{R}^N.$$

51. PROPOSITION. Soit $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \Omega$. Soit $E \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une intégrale première. Alors toute solution $y \colon I \longrightarrow \mathbf{R}^N$ satisfaisant le système (6) et la condition initiale $y(t_0) = y_0$ voit sa trajectoire contenue dans la ligne de niveau $\{E = E(y_0)\} \subset \Omega$.

52. DÉFINITION. Soient $a, b, c, d > 0$ quatre réels strictement positifs. Le *système proie-prédateur de Lotka-Volterra* est le système différentiel

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy. \end{cases} \tag{7}$$

associée à une condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ avec $x_0, y_0 > 0$.

53. PROPOSITION. La solution maximale $X \colon t \in I \longmapsto (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$ du système (7) est à valeurs dans le quadrant $(\mathbf{R}_+^*)^2$. De plus, la fonction

$$E \colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \qquad (x, y) \longmapsto dx + by - c \ln x - a \ln y \end{array} \right.$$

est une intégrale première du système (7). D2

54. THÉORÈME. La solution maximale du système (7) est globale et périodique.